DELLA
MISURA DELLE SCALE
E
DELLE VOLTE A SPIRA,

APPENDICE AL TRATTATO

DELLA MISURA DELLE VOLTE.

NAPOLI,
DALLA TIPOGRAFIA SANGIACOMO
Largo S. Giuseppe de' Ruffi n.° 15.
1834.

AVVISO AL LEGGITORE.

La misura delle scale dritte, ossia a gradi paralleli, non presenta altra difficoltà da quella in fuori che incontrasi nella misura delle volte cilindriche in pendio, che in buona costruzione ne sono il sostegno. Pertanto essendosi queste considerate colla maggiore estensione desiderabile nel *trattato teoretico e pratico della misura delle volte*, altrettanto può dirsi di quelle scale.

Nello stesso trattato però manca affatto la misura delle *volte a spira*, le quali sono il sostegno, o pure si compongono dei gradi delle scale volgarmente dette *a chiocciola*, *a lumaca*, *a spira*, ed anche dal francese *a caracol*. Così fatta mancanza parve ad alcuni tanto più strana, quanto che nella prefazione io mi dimostrai consapevole di una Memoria Accademica relativa alla stessa misura. Questa particolarità avrebbe dovuto convincerli aver io creduto che la misura di tali volte non entrasse nel piano della mia opera, poichè in altro caso niente mi avrebbe impedito d' inserire in essa almeno i risultamenti della Memoria, come, per rapporto ad altre ricerche, ho fatto conoscere quelli che ottennero Legendre, Viviani, ec. Ma il vero è che io, avendo principalmente in vista i fabbricati di grandiosa ed elegante costruzione, pensai non ésservi delle *volte* propriamente dette e che fossero a *spira*, al quale pensamento m' indusse l'osservare che le superficie spirali non si veggono praticate se non al di sotto delle nominate scale, le quali non sono adoperate se non quando l'angustia del luogo non permette la costruzione di scale più dignitose. Del resto, a me giova considerare l' osservazione di quelli che han creduto esistere un vuoto nella mia opera, piuttosto come un invito a ripianarlo che come un effetto di ma-

levolenza, e sotto questo punto di veduta non saprei affrettarmi abbastanza a soddisfare i loro desiderj. (*)

(*) Le ricerche contenute in quest' appendice essendo di lor natura più astruse e dilicate di quelle che racchiude il *trattato della misura delle volte*, ho creduto mio dovere sottoporle al giudizio della Classe Matematica della nostra R. Accademia delle Scienze, su di che il Segretario Perpetuo dell'Accademia mi ha diretto un suo foglio così concepito:

Reale Accademia delle Scienze — Napoli 20 Gennajo 1834.

Al Chiarissimo Signore, il Professore D. Francesco Paolo Tucci.

Signore

» L' Accademia, inteso il rapporto presentato dalla Commessione destinata » ad esaminare la Vostra memoria sulla misura delle scale e delle volte a spi- » ra, non ha potuto fare ammeno di non ammirare la maniera ingegnosa, ed » i metodi con cui avete esaurito le vostre indagini analitiche, le quali danno » de' risultamenti degni di tutta l' attenzione de' dotti per l' esattezza de' cal- » coli, e per la utilità che nella pratica se ne dovrà risentire.

» Con mio particolare piacere vi comunico i sentimenti della Reale Ac- » cademia delle Scienze, restituendovi la Vostra memoria. — *Il Segretario Perpetuo — Cav. Monticelli.*

NOZIONI PRELIMINARI.

1. Le superficie che da taluni dicensi *a spira*, con maggior proprietà di linguaggio chiamansi dagli scrittori italiani e francesi *elicoidiche*, a motivo che la loro generazione dipende essenzialmente dall'*elica*. È poi noto che si dà questo nome ad ogni curva KMN... così descritta sulla superficie di un cilindro HQDEZ, che i lati di questo ML, NF,... compresi fra la curva e la sezione perpendicolare KLFG del cilindro, sono proporzionali ai corrispondenti archi KL, KF,... di questa medesima sezione, contati dal punto K comune alle due curve; per modo che allo spianamento della superficie cilindrica l'elica dee trasformarsi in una linea retta, a somiglianza della sezione perpendicolare.

La superficie del cilindro essendo di lunghezza indefinita, parimente indefinito sarà il numero dei giri o, come suol dirsi, delle *spire* che l'elica può fare nella superficie del cilindro, allorchè la base di questo è una curva che ritorna in se stessa; e tale sarà ancora il numero delle intersezioni di ciascun lato del cilindro coll'elica. Ora quella parte del lato che rimane frapposta, come la KI, a due intersezioni successive, dicesi *passo* dell'elica; e questa curva è determinata, quando alla conoscenza della superficie cilindrica in cui dee giacere, vada unita quella del suo passo.

2. Ciò posto, supponghiamo che una linea qualunque si muova in giro attorno una retta fissa, per modo che tutti i suoi punti producano eliche di un medesimo passo, giacenti nelle superficie dei cilindri retti che hanno per asse comune la retta fissa, e per raggi delle loro basi le rispettive distanze dei punti dalla medesima retta: la superficie così generata sarà di quelle che diconsi *elicoidiche*. E se in vece di una linea, sia una figura quella che si muove colla prescritta condizione, il solido che quindi ne nasce si dirà *elicoidico*.

3. In luogo del supposto movimento, che potrebb' essere per alcuni di difficile concetto, la linea generatrice della superficie elicoidica può supporsi fissa, considerando la superficie qual luogo geometrico di tutte l' eliche relative ai suoi punti, le quali debbono stimarsi determinate per le rispettive distanze che serbano dalla retta fissa, e pel dato loro passo comune. Ed a questo secondo modo che mi sembra più semplice, ho creduto dovermi attenere nella ricerca dell' equazioni alle superficie elicoidiche, di cui debbo occuparmi.

4. Dopo ciò, può dirsi elicoidica ogni scala dove interviene la considerazione dell' elica, come sono in buona costruzione tutte quelle a gradi non paralleli. Il mezzo poi di esse presenta tre distinti casi:

I. talora è un cilindro massiccio di fabbrica, il quale dagli architetti francesi chiamasi *nocciolo*, e dai nostri *fuso*, *albero, colonna* ed anche *anima* della scala;

II. talora è un muro cilindrico internamente vôto;

III. e talora finalmente è del tutto vôto ossia aperto, e la scala dicesi *a giorno*.

Nel I. caso, cioè nelle scale a colonna, i gradi non potrebbero esser meglio assicurati, poichè ciascuno di essi poggia con un capo nel muro esteriore o *di recinto*, e forma all' altro capo un sol masso con uno strato orizzontale della colonna.

Nel II. caso, e spesso ancora nel primo, il muro interno o pure la colonna da una parte, ed il muro di recinto dall' altra parte, servono di piè dritti ad una volta l' intradosso della quale è la superficie elicoidica generata da un semicerchio, volta che gli architetti francesi chiamano *Vis Saint-Gilles* (dal luogo dove ne fu costruita la prima in pietre di taglio), e che serve di sostegno ai gradi della scala. La fermezza delle scale di questa specie non è inferiore a quella delle scale a colonna.

Ma nel III. caso, ossia nelle scale a giorno, i gradi non hanno che un solo appoggio o piè dritto, qual si è il muro di

recinto in cui sono impegnati col capo più largo. Quindi, sebbene possano fissarsi in tal muro e connettersi a vicenda per mezzo di sbarre di ferro che li attraversano, pure l'impiego di tali scale non è senza pericolo, se non quando son destinate a sopportare deboli pressioni. Le medesime però si possono render capaci di resistere non solo a forti pressioni, ma ancora ad urti, modellando i gradi verso l'altro capo in modo che dal loro insieme nasca un solido continuo, pensile nello spazio al pari dei gradi, e detto impropriamente *curva rampante*.

Le scale a giorno si eseguiscono più volentieri in legno che in fabbrica, e la sezione orizzontale del muro di recinto ha non di raro la figura di poligono. È poi comune alle scale a colonna ed alle scale a giorno il non esser formate che dei propri gradi; laddove questi, nelle scale relative al II. caso, son ben distinti dalla volta che serve loro di sostegno.

Noi non aggiungeremo che poche altre dichiarazioni relativamente a ciascuna delle nominate specie di scale, al luogo in cui si tratterà della loro misura, sempre però limitandoci a definire la particolar generazione e i limiti di ciascuna, considerata come fosse tutta di un sol masso; e punto non tratteremo della costruzione delle singole parti, la quale è tutta di competenza della Stereotomìa.

EQUAZIONI DELL'ELICA E DELLE SUPERFICIE ELICOIDICHE; QUADRATURA DI TALI SUPERFICIE, E SUA APPLICAZIONE ALLE SCALE A LUMACA, ED ALLA VITE.

5. Prendiamo per assi ortogonali delle x, y, e z una perpendicolare OX alla retta fissa nel piano della linea generatrice, la perpendicolare OY a questo piano, e la stessa retta fissa OZ; e cominciamo dal trovare l'equazioni dell'elica KMN... generata da un qualunque punto K del piano XOZ. Notando con C il suo passo KI, e con h e k le sue coordinate OH, HK, *Fig.* 1

e dette x, y, z le coordinate OP, PQ, QM di un qualunque suo punto M, abbiamo prima di tutto per la natura del cerchio HDE l' equazione

$$x^2+y^2=h^2 \ldots (1).$$

Inoltre abbiamo per la definizione dell' elica

circonferenza KLFG : arco KL : : KI : LM,

o vero in simboli algebraici

$$2\pi h : h \,\text{arc.sen}\frac{y}{h} :: C : z-k;$$

quindi uguagliando il prodotto degli estremi a quello dei medi avremo per seconda equazione dell' elica

$$2\pi(z-k)=C\,\text{arc.sen}\frac{y}{h} \ldots (2).$$

6. Più generalmente, rapportiamo agli assi OX, OY, OZ l'elica LTU generata dal punto L che non è nel piano XOZ. Sia Q la projezione orizzontale di esso punto, e ritenendo per la LQ il simbolo k, facciamo per poco $OQ=H$. È manifesto, che se la detta elica si riferisse alle rette OQ ed QR quali assi rettangolari delle x' ed y', l'equazioni di essa fra le coordinate Op', $p'q$, e qm di un suo qualunque punto m sarebbero come pocanzi

$$x'^2+y'^2=H^2, \quad \text{e} \quad 2\pi(z-k)=C\,\text{arc.sen}\frac{y}{H}.$$

Conduciamo ora per q la qp parallela ad OY, e per p le pu e pv rispettivamente parallele alle OX' ed OY', per modo che siano Op e pq le coordinate del punto q riferito ai primitivi assi delle x ed y. Avremo da una parte

$x'^2+y'^2=Oq^2=Op^2+pq^2=x^2+y^2$, e da un' altra

$y'=qp'=qu-pv=y\cos pqu-x\,\text{sen}\,pOv=y\cos pOv-x\,\text{sen}\,pOu$.

Ma notando con h ed i le QP e PQ, si fa chiaro che

$$\text{sen}\,pOv=\frac{PQ}{OQ}=\frac{i}{H}, \quad \cos pOv=\frac{OP}{OQ}=\frac{h}{H}, \quad \text{ed} \quad H^2=h^2+i^2;$$

dunque le precedenti equazioni dell' elica LTU ci daranno fra x, y e z le due altre

$$x^2+y^2=h^2+i^2 \ldots (1') \quad \text{e} \quad 2\pi(z-k)=C\,\text{arc.sen}\,\frac{hy-ix}{h^2+i^2},$$

la seconda delle quali può anche rimpiazzarsi con

$$2\pi(z-k)=C\,\text{arc.tan}\,\frac{hy-ix}{hx+iy} \;\ldots\; (2').$$

7. Dopo ciò consideriamo qual primo esempio la superficie elicoidica che verrebbe generata dalla retta OX, qualora si volgesse intorno ad OZ colle condizioni di sopra enunciate.

Per averne l'equazione basta eliminare fra (1), (2), e l'equazione di OX le quantità h e k, che particolareggiano le singole eliche. Ma da una parte questa equazione si esprime semplicemente per $k=0$, e da un'altra parte l'equazione (1) ci dà ... $h=\sqrt{(x^2+y^2)}$; dunque sostituendo in (2) questi valori di h e k, avremo per equazione della proposta superficie elicoidica

$$2\pi z=C\,\text{arc.sen}\,\frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)}}=C\,\text{arc.tan}\frac{y}{x} \ldots (A).$$

8. Prendiamo per secondo esempio la superficie elicoidica generata da una retta qualunque AB del piano XOZ, e notiamo con a e b le parti che questa retta ascinde dagli assi OX, OZ. L'equazione della stessa retta fra le coordinate h e k di un suo punto qualunque si esprime, com'è noto, per

$$\frac{h}{a}+\frac{k}{b}=1;$$

quindi eliminando h e k fra questa e le due (1) e (2), avremo per la superficie di cui si tratta

$$2\pi a(z-b)=a\,C\,\text{arc.tan}\,\frac{y}{x}-2\pi b\sqrt{(x^2+y^2)} \ldots (B).$$

9. Per terzo esempio sceglieremo una superficie elicoidica generata pure da una retta orizzontale, come nel primo, ma che

Fig. 2 in vece di appoggiarsi all'asse OZ, tocca la superficie di un cilindro $ahbZ$ descritto intorno a quest' asse.

Sia DhE la posizione della generatrice nel piano delle xy, e sia Lp un' altra sua posizione qualunque di cui Nr esprime la projezione. Chiamando rispettivamente a e γ il raggio Oh e l' angolo DOh (che non è diverso dall' angolo Lop, o vero NOr) ed osservando che i triangoli DOh, EOh sono rettangoli in h, abbiamo

$$OD=\frac{Oh}{\cos DOh}=\frac{a}{\cos\gamma},\text{ ed } OE=\frac{Oh}{\cos EOh}=\frac{Oh}{\operatorname{sen} DQh}=\frac{a}{\operatorname{sen}\gamma}.$$

Quindi l' equazioni della retta DE, che giace nel piano delle xy, fra le coordinate h, i, k di un qualunque suo punto M, verranno espresse da

$$h\cos\gamma+i\operatorname{sen}\gamma=a\,,\ \text{e}\ k=0\,;$$

e perciò eliminando fra esse e le due (1') e (2') del n.° 6 le h, i, k che particolareggiano l' elica rappresentata da queste due, avremo per la proposta superficie elicoidica una equazione cui può darsi la seguente forma

$$2\pi z=C\left[\text{arc.tan}\frac{ay+x\sqrt{(x^2+y^2-a^2)}}{ax-y\sqrt{(x^2+y^2-a^2)}}-\gamma\right]\ldots\ldots(C).$$

10. Finalmente supponghiamo che la generatrice della superficie elicoidica sia una circonferenza di cerchio che abbia il centro nell' *Fig.* 3 asse OX; e per uniformarci alle denominazioni che usammo nel trattato sulla misura delle volte (251), notiamo con a ed A il raggio del cerchio, e la distanza OI del suo centro dall'asse OZ. Sarà $(h-A)^2+k^2=a^2$ l'equazione di esso cerchio fra le coordinate h e k di un qualunque suo punto. E però, eliminando al solito h e k fra questa equazione e le due (1) e (2), troveremo per la superficie elicoidica

$$\left(2\pi z-C\,\text{arc.tan}\frac{y}{x}\right)^2+4\pi^2\left[\sqrt{(x^2+y^2)}-A\right]^2=4\pi^2a^2\ldots(D).$$

Parimente troverebbesi l'equazione della superficie elicoidica generata da qualsivoglia altra linea, eliminando sempre fra l'equazioni (1), (2), e quella di cotal linea, le coordinate h e k dei suoi punti.

E se la generatrice, giacendo comunque nello spazio, fosse rappresentata da due equazioni fra le coordinate h, i, k dei suoi punti; l'equazione della superficie elicoidica si troverebbe del pari, eliminando siffatte coordinate fra quell'equazioni e le due (1') e (2') del num. 6.

11. Per valutare intanto la più semplice delle superficie elicoidiche, considerata nel num. 7, ritorno all'equazione (A) di essa. Differenziandola rispetto di tutte tre le cordinate viene

$$2\pi dz = \frac{C(x\,dy - y\,dx)}{x^2+y^2},$$

donde si ha per le differenze parziali e relative ad x ed y

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{C}{2\pi}.\frac{y}{x^2+y^2}, \text{ e } \frac{dz}{dy} = \frac{C}{2\pi}.\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Per la qual cosa notando con S la superficie di cui si cerca la misura, avremo per le note formole

$$S = \int\int dx\,dy \sqrt{\left(1+\frac{dz^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dy^2}\right)} = \int\int dx\,dy \sqrt{\left(1+\frac{C^2}{4\pi^2(x^2+y^2)}\right)}.$$

Questa duplice integrazione diviene più facile, e mena a risultamenti più analoghi alla natura della nostra superficie, introducendo (come nel num. 256 del trattato sulla misura delle volte) l'angolo XOQ in luogo della variabile y a cui è ligato per l'equazione $y = x \tan\varphi$. Ma rispetto delle variabili primitive, dovrebbe supporsi costante x quando si volesse integrare per rapporto ad y riguardata come variabile; dunque nella sostituzione di φ ad y, ciò che si dee surrogare a dy dovrà nascere differenziando $x \tan\varphi$ rispetto solamente di φ, per modo che sarà *Fig. 1*

$$dy = \frac{x\,d\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

Ma per la sostituzione di $x \tan\varphi$ ad y si ha successivamente

$$\sqrt{(1+\frac{C^2}{4\pi^2(x^2+y^2)})}=\int\sqrt{(1+\frac{C^2}{4\pi^2x^2\sec^2\varphi})}=$$

$$\sqrt{(1+\frac{C^2\cos^2\varphi}{4\pi^2x^2})}=\frac{1}{x}\sqrt{(x^2+\frac{C^2\cos^2\varphi}{4\pi^2})};$$

dunque avremo in x e φ

$$S=\int\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}\int dx\sqrt{(x^2+\frac{C^2\cos^2\varphi}{4\pi^2})}.$$

Per conoscere i limiti fra i quali van fatte queste integrazioni, suppongo essere hH la retta determinata che genera la superficie di cui si vuol la misura, e noto con a ed a' le rette Oh ed OH. É manifesto che se si fosse conservata la variabile y, l'integrale relativo ad x dovrebbe stendersi da $x=\sqrt{(a^2-y^2)}$ ad $x=\sqrt{(a'^2-y^2)}$: queste essendo le relazioni fra x ed y nascenti dall'equazioni dell'eliche generate dai punti h ed H, le quali servono di termini alla superficie richiesta. Sostituendo dunque $x\tan\varphi$ per y, avremo come limiti di x in φ, $x=a\cos\varphi$ ed $x=a'\cos\varphi$. Rispetto poi della variabile φ cui si riferisce la seconda integrazione, essendo chiaro che le parti delle superficie elicoidiche, frapposte a piani comunque menati per l'asse delle medesime, son proporzionali agli angoli da essi contenuti, ne segue che a contare la superficie dalla retta hH posta nel piano XOZ, i limiti di φ saranno lo zero e quel valore che risponde all' ultima posizione della generatrice hH sulla superficie. Per determinarlo osservo che i valori di φ souo essi stessi proporzionali alle altezze, che i punti corrispondenti dell'elica generata dal punto H serbano dal piano HQRE; dunque notando con C' l' altezza dell' ultima posizione della generatrice paragonata alla prima, e ritenendo C per esprimere l'altezza relativa al valore 2π di φ, l' altro valore di φ sarà dato dalla proporzione

$C:C'::2\pi:\varphi$, di dove $\varphi=2\frac{C'}{C}\pi$.

Dopo ciò, dandosi la pena di eseguire l'integrazione relativa ad x coi metodi conosciuti, o pure colla formola (H) del n. 65 del trattato sulla misura delle volte, si trova

$$\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}\int_{a\cos\varphi}^{a'\cos\varphi} dx\sqrt{\left(\frac{C^2\cos^2\varphi}{4\pi^2}+x^2\right)}=$$

$$\frac{d\varphi}{4\pi}\left[a'\sqrt{(4\pi^2a'^2+C^2)}-a\sqrt{(4\pi^2a^2+C^2)}+\frac{C^2}{2\pi}\text{Log}\frac{2\pi a'+\sqrt{(4\pi^2a'^2+C^2)}}{2\pi a+\sqrt{(4\pi^2a^2+C^2)}}\right];$$

l' integrazione poi di questa formola rispetto a φ, nei suddetti limiti $\varphi=0$, $\varphi=2\frac{C}{C'}\pi$, e riducesi a cambiare $d\varphi$ in $2\frac{C}{C'}\pi$, e viene finalmente

$$S=\frac{1}{2}\frac{C}{C'}\left[a'\sqrt{(4\pi^2a'^2+C^2)}-a\sqrt{(4\pi^2a^2+C^2)}+\frac{C^2}{2\pi}\text{Log}\frac{2\pi a'+\sqrt{(4\pi^2a'^2+C^2)}}{2\pi a+\sqrt{(4\pi^2a^2+C^2)}}\right].$$

12. Per facilitare il calcolo numerico di questa formola può supporsi $C=2\pi a.\tan\alpha=2\pi a'\tan\alpha'$; ed allora osservando che

$$\frac{1+\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}=\cot\frac{\alpha}{2},\ \frac{1+\cos\alpha'}{\text{sen}\,\alpha'}=\cot\frac{\alpha'}{2},\ \text{avremo}$$

$$S=\frac{CC'}{4\pi}\left[\frac{\cot\alpha'}{\text{sen}\,\alpha'}-\frac{\cot\alpha}{\text{sen}\,\alpha}+\lambda\left(\log\cot\frac{\alpha'}{2}-\log\cot\frac{\alpha}{2}\right)\right]\ldots\text{(I)},$$

dove i logaritmi son briggiani, e λ è il numero costante 2,30258 che serve a ridurli neperiani, come prima erano.

13. Le formole precedenti sarebbero state alquanto più composte se le linee Oh ed OH si fossero espresse per la retta hH e per la distanza I'O del suo punto medio I' dall' asse OZ. Ma possiamo attualmente uniformarci alla costante notazione del trattato sulla misura delle volte, ponendo $h\text{H}=2a$ ed $\text{OI}'=A$, e quindi sostituendo $A-a$ ed $A+a$ in vece di a ed a'. Allora la precedente formola (I), a cui ci atteniamo come più co-

moda al calcolo numerico, rimane la stessa, ma gli angoli α ed α' dai quali è affetta vengono determinati per l'equazioni

$$C=2\pi(A-a)\tan\alpha=2\pi(A+a)\tan\alpha' \quad . \; . \; . \; (G).$$

14. La superficie elicoidica della vite rettangolare, e quella che sovente affettano nel loro di sotto le scale a lumaca di pianta circolare, sono appunto della specie considerata. Abbiamo dunque il mezzo onde valutarle nella formola (I) considerata insieme coll'equazioni (G), dove a esprime la metà della lunghezza dei gradi della scala, o della retta che genera la superficie elicoidica della vite e ne misura il rilievo, A la distanza del punto medio di tal lunghezza o di tal generatrice dall'asse della scala o della vite, e C e C' sono le rispettive altezze di una spira, e della intera scala o vite.

15. La formola (I), comunque affetta di quantità circolari e logaritmiche, non lascia di essere abbastanza semplice quando si rifletta, che la superficie di cui esprime la misura è nel tempo stesso rigata e trascendente. Ciò non si dee attribuire che alla natura dei suoi limiti, i quali sono stati i più in armonia colla di lei generazione. Ed in vero, se per uno di tai limiti prendiamo solamente un piano verticale, avremo per la superficie un'espressione affetta da trascendenti ellitiche, e da altre di ordine più composto.

Per esaminare da vicino questo caso che sovente può esser utile, prenderemo per asse delle x la perpendicolare alla traccia orizzontale del piano, lasciando al suo luogo l'origine delle coordinate. Così, chiamando A quella perpendicolare, l'equazione del piano sarà semplicissimamente $x=A$, ed i limiti di x, dopo l'integrazione relativa a questa variabile, saranno $x=a\cos\varphi$ ed $x=A$. Inoltre, supponendo passare pel detto asse delle x una superficie elicoidica simile e parallela alla proposta, la sua equazione non sarà diversa dalla (A) del n.° 7, ed in pianta i limiti di amendue saranno gli stessi.

Operando dunque come se si avesse a misurare quest'ultima superficie, prendasi fra i detti limiti l' integrale di . . . . . $dx\sqrt{(x^2+\frac{C^2\cos^2\varphi}{4\pi^2})}$ trovato nel n. 9, e moltiplicando ciò che ne nasce per $\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$, facciansi rapporto a φ le integrazioni eseguibili colle regole ordinarie. Il risultato di tali operazioni è l'espressione

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{a\varphi}{2}\sqrt{(a^2+n^2)}-\frac{n^2\varphi}{2}\mathrm{Log}[a+\sqrt{(a^2+n^2)}]-\frac{n^2}{2}\int d\varphi\mathrm{Log}.\cos\varphi \\ +\frac{A}{2}\int\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}\sqrt{(A^2+n^2\cos^2\varphi)}+\frac{n^2}{2}\int d\varphi\mathrm{Log}[A+\sqrt{(A^2+n^2\cos^2\varphi)}] \end{array}\right\} (P)$$

dove per brevità si è scritto n^2 in luogo di $\frac{C^2}{4\pi^2}$.

Riguardo al secondo integrale che in essa è notato, osservo che

$$\sqrt{(A^2+n^2\cos^2\varphi)}=\sqrt{(A^2+n^2-n^2\mathrm{sen}^2\varphi)}=\sqrt{(A^2+n^2)}(1-\frac{n^2}{n^2+A^2}\mathrm{sen}^2\varphi);$$

quindi supponendo $\frac{n^2}{n^2+A^2}=\mathrm{sen}^2\theta$, e $\sqrt{(1-\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}^2\varphi)}=\Delta$, sarà

$$\int\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}\sqrt{(A^2+n^2\cos^2\varphi)}=\frac{n}{\mathrm{sen}\,\theta}\int\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}\Delta=\frac{n}{\mathrm{sen}\,\theta}(\Delta\tan\varphi+F-E),\ (^*)$$

dove F ed E esprimono, come nel trattato della misura delle volte, le trascendenti $\int\frac{d\varphi}{\Delta}$, e $\int\Delta d\varphi$, ossia le funzioni ellittiche di prima e di seconda specie, date per le tavole ellittiche generali del Legendre.

Quanto al terzo integrale dell' espressione (P), trattandolo col metodo *per parti* diviene

---

(*) Legendre, *Esercizj di calcolo integrale*, tomo 1.° pag. 200.

$$\varphi\,\text{Log}[\surd(A^2+n^2\cos^2\varphi)+A]+n^2\int\frac{\varphi\,d\varphi\,\text{sen}\,\varphi\cos\varphi}{\surd(A^2+n^2\cos^2\varphi).[\surd(A^2+n^2\cos^2\varphi)+A]}$$

ma $\surd(A^2+n^2\cos^2\varphi)+A=\dfrac{n^2\cos^2\varphi}{\surd(A^2+n^2\cos^2\varphi)-A}$, dunque sostituendo e riducendo sarà

$$\varphi\,\text{Log}[\surd(A^2+n^2\cos^2\varphi)+A]+\int\frac{\varphi d\varphi\,\text{sen}\varphi}{\cos\varphi}-A\int\frac{\varphi\,d\varphi\,\text{sen}\,\varphi}{\cos\varphi\surd(A^2+n^2\cos^2\varphi)}$$

o vero, effettuando per parti la prima di queste due integrazioni, e riducendo

$$\varphi\,\text{Log}\frac{\surd(A^2+n^2\cos^2\varphi)+A}{\cos\varphi}+\int d\varphi\,\text{Log}\cos\varphi-A\int\frac{\varphi d\varphi\,\text{sen}\,\varphi}{\cos\varphi\surd(A^2+n^2\cos^2\varphi)}.$$

Sostituendo nell' espressione (P) questo risultato ed il precedente invece del terzo e del secondo integrale quivi esistenti, il primo di lei integrale $\int d\varphi\,\text{Log}\cos\varphi$ resta distrutto, ed in luogo di (P) viene

$$\left.\begin{array}{l}-\dfrac{a\varphi}{2}\surd(a^2+n^2)+\dfrac{n^2\varphi}{2}\text{Log}\dfrac{A+\surd(A^2+n^2\cos^2\varphi)}{\cos\varphi[a+\surd(a^2+n^2)]}+\\ \dfrac{An}{2\,\text{sen}\,\theta}(\Delta\tan\varphi+\text{F}-\text{E})-\dfrac{An^2}{2}\displaystyle\int\dfrac{\varphi\,d\varphi\,\text{sen}\,\varphi}{\cos\varphi\surd(A^2+n^2\cos^2\varphi)}\end{array}\right\}\text{(Q)}.$$

Ora l' integrale che in questa è notato non si può avere brevemente senza accomodarsi di una tenue approssimazione. A tal fine, seguendo il metodo sovente praticato nella misura delle volte, ed esposto al numero 234 degli ***elementi di calcolo*** del sig. Lacroix, si caverà fuori del segno $\int$ il fattore $\dfrac{1}{\cos\varphi\surd(A^2+n^2\cos^2\varphi)}$ quasi fosse costante, e si troveranno il maggiore ed il minor valore che ammette fra i limiti che dee aver φ: e la semisomma di tai valori, moltiplicata per quello di $\int\varphi d\varphi\,\text{sen}\,\varphi$ preso fra gli stessi limiti, sarà il domandato valor prossimo.

L' integrale $\int\varphi d\varphi\,\text{sen}\varphi$ è uno dei più semplici di quelli considerati dal geometra italiano Mascheroni nelle sue note al cal-

colo integrale dell' Eulero, degne dell' opera, e si ottiene subito col metodo *per parti* :

$$\int d\varphi \,\mathrm{sen}\,\varphi \times \varphi = -\varphi \cos\varphi + \int d\varphi \cos\varphi = \mathrm{sen}\,\varphi - \varphi\cos\varphi.$$

Per conseguenza notando con M ed m il maggiore ed il minor valore del suddetto fattore, i quali rispondono in consonanza al maggiore ed al minor valore di φ, l' integrale notato in fine della formola (Q) sarà prossimamente uguale ad . . . . $\frac{m+M}{2}(\mathrm{sen}\,\varphi - \varphi\cos\varphi)$; e la formola stessa, riducendo a briggiano il logaritmo neperiano, diverrà

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{a\varphi}{2}\sqrt{(a^2+n^2)}+\frac{n^2\varphi}{2}\lambda\log\frac{A+\sqrt{(A^2+n^2\cos^2\varphi)}}{\cos\varphi[a+\sqrt{(a^2+n^2)}]}+ \\ \frac{An}{2\,\mathrm{sen}\,\theta}[\Delta\tan\varphi+F(\theta,\varphi)-E(\theta,\varphi)]-\frac{An^2(m+M)}{4}(\mathrm{sen}\,\varphi-\varphi\cos\varphi). \end{array}\right\}\text{(II).}$$

16. È bene osservare che questa formola è nulla insieme con φ, onde il di lei valore da $\varphi=0$ sino ad un altro valor di φ sarà quello che assume sostituendo per φ quest' altro valore.

Sia per esempio 45° o vero $\frac{\pi}{4}$ il secondo valore di φ. Allora

$$\tan\varphi = 1,\ \ \mathrm{sen}\,\varphi = \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \Delta = \sqrt{\left(1-\frac{\mathrm{sen}^2\theta}{2}\right)};$$

inoltre i valori di m ed M, uguali rispettivamente a quelli che assume la frazione $\frac{1}{\cos\varphi\sqrt{(A^2+n^2\cos^2\varphi)}}$ ponendo $\varphi=0$, e $\varphi=45°$, sono $m=\frac{1}{\sqrt{(A^2+n^2)}}$ ed $M=\frac{2}{\sqrt{(2A^2+n^2)}}$. Quindi il valore della formola (II) è pienamente determinato.

Per calcolarlo più facilmente può supporsi

$$\sqrt{\left(1-\frac{\mathrm{sen}^2\theta}{2}\right)}=\cos\psi,\ \text{di dove}\ \mathrm{sen}\,\psi=\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\sqrt{2}},$$

e C ossia $2\pi A\tan\theta = 2\pi A\sqrt{2}\,.\tan\alpha = 2\pi a\tan\alpha'$. Così gli angoli θ, ψ, α ed α' son tosto determinati, ed introducendoli in luogo

di m, M, ed n nella formola (II), ed esprimendo in decimali i coefficienti numerici, si trova

$$\left.\begin{array}{l} C^2\left[0{,}04580 \log \cot\frac{\alpha}{2} \tan\frac{\alpha'}{2} - 0{,}00136 \cos\alpha - 0{,}00096 \cos\theta\right] \\ + \frac{0{,}07958}{\text{sen}\,\theta}\, C A\left[\cos\psi + F(\theta, 45^\circ) - E(\theta, 45^\circ)\right] - \frac{0{,}39270}{\cos\alpha'}\, a^2 \end{array}\right\} (\text{II}') :$$

dove il secondo ed il terzo dei termini moltiplicati per C^2 son così piccoli, da potersi trascurare senza scrupolo in questo genere di ricerche.

Abbiam voluto espressamente trattar questo caso, perchè al medesimo si riferiscono quelle scale a colonna o pure *a giorno*, dove il muro di recinto è di pianta quadrata. Allora a è il raggio della colonna o del *giorno*, $2A$ il lato del quadrato, e C il passo dell' elica da cui dipende la costruzione della scala. La superficie poi del sotto-scala è ottupla per ogni suo giro di ciò che nasce dalla trovata espressione, come lo è 360 di 45. (*).

17. La seconda superficie elicoidica, considerata nel n.° 8, sembra del tutto estranea all' argomento delle scale a lumaca. Nondimeno appartenendo tal superficie alla vite triangolare, il di cui uso è sì continuo ed interessante nelle machine, non sarà inutile trovarne brevemente la misura.

L' equazione (B) di detta superficie, differenziata e poi divisa per $2\pi a$ produce

$$dz = \frac{C(x\,dy - y\,dx)}{2\pi(x^2+y^2)} - \frac{b(x\,dx + y\,dy)}{a\sqrt{(x^2+y^2)}};$$

quindi supponendo per poco

$$\frac{C}{2\pi(x^2+y^2)} = m, \quad e \quad \frac{b}{a\sqrt{(x^2+y^2)}} = n,$$

(*) La bella scala a lumaca, che dal Palazzo Reale di Napoli mette giù nella Darsena, è appunto a colonna e di recinto quadrato; onde non altrimente che per la formola (III) può misurarsene la superficie con plausibile esattezza.

avremo le differenze parziali

$$\frac{dz}{dx}=-my-nx\,;\ \text{e}\ \frac{dz}{dy}=mx-ny\,,$$

e la somma dei lor quadrati

$$\frac{dz^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dy^2}=(m^2+n^2)(x^2+y^2)=\frac{C^2}{4\pi^2(x^2+y^2)}+\frac{b^2}{a^2}.$$

Sarà dunque

$$S=\iint dx\,dy\sqrt{\left(\frac{dz^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dy^2}+1\right)}=\iint dx dy\sqrt{\left(\frac{C^2}{4\pi^2(x^2+y^2)}+\frac{b^2}{a^2}+1\right)}.$$

Questa formola non differisce essenzialmente da quella che si ebbe nel n. 11, anzi supponendo per poco $\frac{C^2a^2}{b^2+a^2}=D^2$, si può mettere facilmente sotto la forma

$$S=\frac{C}{D}\iint dx\,dy\sqrt{\left(1+\frac{D^2}{4\pi^2(x^2+y^2)}\right)},$$

la quale per ciò che riguarda le integrazioni non differisce dalla citata se non per la lettera D scritta al luogo di C. Ritenendo dunque a ed a' per indicare il raggio del nocciolo della vite, e quello relativo al suo spigolo elicoidico, e supponendo pure

$$D=\frac{aC}{\sqrt{(a^2+b^2)}}=2\pi a\tan\alpha=2\pi a'\tan\alpha',$$

la superficie di essa verrà indicata da

$$S=\frac{aCC}{4\pi\sqrt{(a^2+b^2)}}\left[\frac{\cot\alpha'}{\operatorname{sen}\alpha'}-\frac{\cot\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}+\lambda\left(\log\cot\frac{\alpha'}{2}-\log\cot\frac{\alpha}{2}\right)\right].$$

Siccome poi difficilmente potrebbesi misurare sulla vite la retta indicata da b, mentre ciò può farsi assai bene della sua retta generatrice AK, si osserverà, chiamando g quest'ultima, che

$$\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}=\frac{\text{AH}}{\text{AK}}=\frac{a'-a}{g};$$

e così la superficie elicoidica generata da una retta g, i di cui

termini distano dall' asse di rotazione per a ed. a', di passo C e di altezza C', verrà espressa da

$$S = \frac{(a'-a)CC'}{4\pi g}\left[\frac{\cot\alpha'}{\operatorname{sen}\alpha'} - \frac{\cot\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} + \lambda\left(\log\cot\frac{\alpha'}{2} - \log\cot\frac{\alpha}{2}\right)\right] \text{(III)},$$

$$\text{dove } \frac{(a'-a)C}{g} = 2\pi a \tan\alpha = 2\pi a' \tan\alpha'.$$

18. In quelle scale a colonna dove la superficie del sottoscala è generata da una linea retta, questa superficie può essere continua o discontinua. Nel primo caso la sezione prodotta nei gradi della superficie cilindrica interna del muro di recinto, sviluppata in piano vien espressa dalla fig. 4, dove $rstuu't'r$, $r's't'u'u''t''r'$ indicano le sezioni spianate di due gradi successivi, e le tu, $t'u'$, $t''u''$ che sembrano rette hanno in realtà una piccolissima curvatura verso $L'M'$. La LL' formata delle uu', $u'u''$, . . . e la MM' che unisce i punti r, r', ... son rette parallele, e perciò si voltano in due eliche parallele e di ugual passo, quando la superficie piana compresa fra le rette indefinite LL', MM' si finge applicata sopra la detta superficie cilindrica. Queste due eliche sono allora le direttrici della superficie del sottoscala, e dell'altra che passa pegli spigoli orizzontali dei gradi; e ne sono generatrici le perpendicolari all'asse del cilindro dai punti successivi dell' eliche. Nella stessa applicazione le rs, $r's'$, . . . che dinotano le altezze (volgarmente *alzate*) dei gradi, cambiandosi in lati del cilindro, non lasciano di essere linee rette; laddove le st, rt', $r't''$, . . . per serbarsi perpendicolari ai lati del cilindro, divengono archi circolari; e precisamente l' arco in cui si volta rs' è il termine della faccia orizzontale (volgarmente detta *pedata*) del grado relativo alla sezione $rstuu't'r$.

Fig. 4

Nel secondo caso poi lo spianamento della sezione generata nei gradi della superficie cilindrica del muro di recinto vien e-

spressa dalla fig. 5, ed $rstut'r$, $r's't'u't''r'$, che appartengono a due gradi successivi son figure interamente rettilinee. Anche qui le $un'\ldots$, $rr'\ldots$ son rette parallele; ma quando si applica la superficie piana LMM'L' sulla detta superficie cilindrica, la linea spezzata $tut'u'\ldots$ si cambia in un' altra formata di eliche uguali e di rette uguali; e quindi la superficie del sottoscala, tuttavia generata come nel primo caso, riesce discontinua, formandosi alternativamente di porzioni piane e rettangolari, e di porzioni elicoidiche. Ma non per questo sarà difficile il valutare una di queste porzioni elicoidiche: imperciocchè essendo $rt'=r't''=s'v$, la $t'v$ uguaglierà la rs' che stimasi nota. Ma son pur date le $r's'$ e $t''u'$, di cui è differenza $u'v$; dunque per la conoscenza dei cateti del triangolo rettangolo $t'vu'$ si saprà l'angolo $u't'v$, che preso per valore di α mena alla conoscenza di C; quindi si ottiene α', ed infine mediante la formola (I) la superficie richiesta, prendendo per C' la $u'v$.

Fig. 5

19. Nel primo dei due casi dichiarati nel numero precedente, la costruzione della scala si reputa migliore quando la superficie del sotto-scala è quella espressa per l'equazione (C) del num. 9. Bisogna dunque adoperarci a ritrovarne la misura.

Dandosi la pena di differenziare la detta equazione, trovasi

$$2\pi\, dz = C\left[\frac{a(xdx+ydy)+(xdy-ydx)\sqrt{(x^2+y^2-a^2)}}{(x^2+y^2)\sqrt{(x^2+y^2-a^2)}}\right],$$

da cui, ponendo per brevità

$$\frac{aC}{2\pi(x^2+y^2)\sqrt{(x^2+y^2-a^2)}}=m, \text{ e } \frac{C}{2\pi(x^2+y^2)}=n,$$

si ottengono le differenze parziali di z

$$\frac{dz}{dx}=mx-ny, \text{ e } \frac{dz}{dy}=my+nx,$$

e quindi si ha per la somma dei loro quadrati

$$\frac{dz^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dy^2}=(m^2+n^2)(x^2+y^2),$$

ossia, restituendo ad m ed n i loro valori,

$$\frac{dz^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dy^2}=\frac{C^2}{4\pi^2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2-a^2}.$$

Questa espressione, già molto semplice in x ed y, lo diviene anche più e si riduce a $\frac{C^2}{4\pi^2 t^2}$, allorchè a quelle variabili si sostituiscono le altre φ e t, che sono in maggiore armonia colla generazione della nostra superficie, e però ci lasciano sperare più facilità nelle integrazioni.

A trovare intanto l' espressione da sostituirsi in luogo di $dxdy$ devono servire l' equazioni che abbiamo fra x, y, t e φ. E di fatti ricordando che al variare φ dee stimarsi costante t, avremo dx differenziando rispetto di x e φ l' equazione .... $x=a\cos\varphi+t\,\mathrm{sen}\,\varphi$, con che viene $dx=(-a\,\mathrm{sen}\,\varphi+t\cos\varphi)\,d\varphi$. La stessa osservazione, applicata alle variabili x ed y ne mostra che dee ricercarsi dy differenziando l' equazione $x^2+y^2=a^2+t^2$ per rapporto ad y e t, e con tal modo si ha $ydy=tdt$; ma abbiamo $y=a\,\mathrm{sen}\,\varphi-t\cos\varphi$, dunque sarà $dx\,dy=-t\,dt\,d\varphi$. È poi per le cose dette più sopra

$$\surd\left(1+\frac{dz^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dy^2}\right)=\surd\left(1+\frac{C^2}{4\pi^2 t^2}\right)=\frac{1}{t}\surd\left(t^2+\frac{C^2}{4\pi^2}\right);$$

dunque astrazion fatta dal segno, avremo per espressione dell' integrale doppio relativo alla misura della superficie

$$S=\iint dxdy\left(1+\frac{dz^2}{dx^2}+\frac{dy^2}{dy^2}\right)=\iint dt\,d\varphi\surd\left(t^2+\frac{C^2}{4\pi^2}\right)$$

$$=\int d\varphi\int dt\surd\left(t^2+\frac{C^2}{4\pi^2}\right).$$

Nella integrazione, che si riferisce a t, e che si esegue pure mediante la formola citata nel n. 11, i limiti di questa variabile sono $t=0$, e $t=r$ R$=h$H$=\surd(a'^2-a^2)$, dove a'=OH=OA; per modo che supponendo $C=2\pi\tan\alpha\surd(a'^2-a^2)$, ed osservando che $\frac{1+\cos\alpha}{\mathrm{sen}\,\alpha}=\cot\frac{\alpha}{2}$,

Fig. 2

il risultato di quella integrazione fra i detti limiti si può mettere facilmente sotto la forma

$$\frac{C^2}{8\pi^2}\left[\frac{\cot\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}+\lambda\log\cot\frac{\alpha}{2}\right].$$

Ma i limiti di φ nella seconda integrazione sono, come nel num. 11, $\varphi=0$, e $\varphi=2\frac{C'}{C}\pi$, ritenendo per C' il medesimo significato di quel numero; dunque la richiesta superficie elicoidica sarà finalmente espressa da

$$S=\frac{CC'}{4\pi}\left[\frac{\cot\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}+\lambda\log\cot\frac{\alpha}{2}\right]\ .\ .\ .\ (\text{IV}).$$

20. Qui pure, come nel num. 13, per essere uniformi alla notazione seguita nel trattato della misura delle volte, le rette Oa, OA si possono esprimere per la A a e per la distanza del suo punto medio da O, che si vogliono indicare con $2a$ ed $\mathcal{A}$. Le due prime ossia le a ed a' divengono allora $\mathcal{A}-a$ ed $\mathcal{A}+a$, ed il radicale $\sqrt{(a'^2-a^2)}$ cambiasi nell'altro $2\sqrt{a\mathcal{A}}$. Adunque la precedente formola (IV), e l'equazione ausiliaria $c=4\pi\sqrt{a\mathcal{A}}\,.\tan\alpha$ che serve a determinare l'angolo α, basteranno a compir la misura dimandata.

21. Passiamo intanto ad occuparci della superficie elicoidica generata dal cerchio. L'equazione (D) di essa (10) differenziata e divisa per 2 produce

$$(2\pi z-C\operatorname{arc.tan}\frac{y}{x})(2\pi dz-C\frac{xdy-xdy}{x^2+y^2})+4\pi^2[\sqrt{(x^2+y^2)}-\mathcal{A}]\frac{xdx+ydy}{\sqrt{(x^2+y^2)}}=0$$

di dove cavando dz si ottiene

$$dz=\frac{C(xdy-ydx)}{2\pi(x^2+y^2)}+2\pi\frac{[\mathcal{A}-\sqrt{(x^2+y^2)}](xdx+y\,dy)}{(2\pi z-C\operatorname{arc.tan}\frac{y}{x})\sqrt{(x^2+y^2)}}.$$

In questa non si ha che ad osservare con attenzione i coef-

ficienti di dx e di dy che sono le differenze parziali di z, per iscorgere che facendo a motivo di brevità

$$m=\frac{C}{2\pi(x^2+y^2)} \text{ ed } n=\frac{2[A-\sqrt{(x^2+y^2)}]}{(2\pi z-C\text{arc.tan}\frac{y}{x})\sqrt{(x^2+y^2)}},$$

tali differenze si possono scrivere sotto la forma

$$\frac{dz}{dx}=-my+nx, \text{ e } \frac{dz}{dy}=mx+ny,$$

onde si avrà per la somma dei lor quadrati

$$\frac{dz^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dy^2}=(m^2+n^2)(x^2+y^2)=\frac{C^2}{4\pi^2(x^2+y^2)}+\frac{4\pi^2[A-\sqrt{(x^2+y^2)}]^2}{(2\pi z-C\text{arc.tan}\frac{y}{x})^2}$$

Intanto se noi riduciamo all' unità il secondo membro dell' equazione (D) con dividerla per $4\pi^2a^2$, potremo dinotare le due frazioni che allora ne formano il primo membro con $\cos^2\theta$ e $\text{sen}^2\theta$, e così avremo l' equazioni

$$2\pi z-C\text{arc}.\tan\frac{y}{x}=2\pi a\cos\theta, \text{ e } \sqrt{(x^2+y^2)}-A=a\,\text{sen}\theta.$$

La seconda liberata dal radicale diviene $x^2+y^2=(A+a\,\text{sen}\,\theta)^2$, onde l' espressione dianzi recata per $\frac{dz^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dy^2}$, trovandosi affetta dai primi membri di queste tre equazioni, verrà subitamente espressa in θ da

$$\tan^2\theta+\frac{C}{4\pi^2(A+a\,\text{sen}\,\theta)^2}.$$

Inoltre, ripigliando l' equazione $x^2+y^2=(A+a\text{sen}\theta)^2$, e riducendone pure il secondo membro all' unità con dividerla per $(A+a\text{sen}\theta)^2$, potremo uguagliare a $\cos^2\varphi$ ed a $\text{sen}^2\varphi$ le due frazioni donde allora si compone il primo membro. Con questo mezzo avremo

$$x=(A+a\text{sen}\theta)\cos\varphi, \text{ ed } y=(A+a\text{sen}\theta)\text{sen}\varphi,$$

e dividendo la seconda per la prima, tornerà l'equazione $y=x\tan\varphi$ innanzi (11) adoperata.

Ora l'espressioni di x ed y in φ e θ non essendo diverse da quelle usate nel num. 258 del trattato sulla misura delle volte, abbiamo, come nel citato luogo,

$$dxdy=-a\cos\theta(A+a\,\mathrm{sen}\,\theta)d\theta d\varphi.$$

Quindi la richiesta superficie elicoidica, espressa com'è noto in x ed y dall'integrale doppio $S=\iint dx\,dy\sqrt{(1+\frac{dz^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dy^2})}$, verrà espressa in φ e θ da

$$S=-\frac{a}{2\pi}\int d\varphi\int d\theta\sqrt{[4\pi^2(A+a\,\mathrm{sen}\,\theta)^2+C^2\cos^2\theta]}.$$

22. Quì prima di andar oltre giova osservare quali siano i limiti delle due integrazioni da effettuarsi. Quelli della superficie che si vuol misurare sono in un senso l'eliche generate dai punti a, A, ed in un altro senso le due posizioni estreme della semicirconferenza generatrice aCA. Ma le due eliche ci danno fra le variabili primitive l'equazioni Fig. 3

$$x^2+y^2=(A-a)^2,\text{ ed }x^2+y^2=(A+a)^2;$$

dunque, esprimendo quest'equazioni in φ e θ, avremo

$$(A+a\,\mathrm{sen}\,\theta)^2=(A-a)^2,\text{ ed }(A+a\,\mathrm{sen}\,\theta)^2=(A+a)^2,$$

donde apparisce che i limiti di $\mathrm{sen}\,\theta$ sono

$$\mathrm{sen}\,\theta=-1,\text{ e }\mathrm{sen}\,\theta=1.$$

Rispetto poi di φ, dovendo qnesta variabile stimarsi costante quando integrasi rapporto a θ, il risultato della prima integrazione (effettuata fra gli anzidetti limiti) moltiplicato per $d\varphi$ esprimerà un elemento della superficie, rappresentato in projezione da MNnm quando per φ s'intenda l'angolo AOM, o piuttosto l'arco circolare di raggio 1 che lo misura. E quindi, a contar la superficie dalla generatrice sita nel piano XOZ, i limiti di φ saranno come nel num. 19, $\varphi=0$, e $\varphi=2\frac{C'}{C}\pi$, no-

tando con C' la differenza delle altezze di un punto qualunque della generatrice considerata nelle sue posizioni estreme.

23. Dopo ciò ritornando all' espressione di S in φ e θ, e considerando l' integrale relativo a θ come affetto dal segno $-$, ponghiamo in esso $\operatorname{sen}\theta = -\dfrac{a^2+A^2t}{aA(1+t)}$. Avremo in suo luogo un altro integrale, che al supporre per brevità $a^2C^2+4\pi^2(A^2-a^2)a^2=b^2C^2$ si esprime da principio con

$$\frac{(A^2-a^2)C}{Aa}\int\frac{dt(b^2-A^2t^2)}{(1+t)^2\sqrt{(a^2-A^2t^2)(b^2-A^2t^2)}}=\frac{(A^2-a^2)C}{Aa}\int \mathrm{T}\,dt.$$

e poi moltiplicando i termini della frazione soggetta al segno $\int$ per $(1-t)^2$, viene $\int \mathrm{T}\,dt=$

$$\int\frac{(b^2-A^2t^2)(1+t^2)dt}{(1-t^2)^2\sqrt{(a^2-A^2t^2)(b^2-A^2t^2)}}-\int\frac{2(b^2-A^2t^2)t\,dt}{(1-t^2)^2\sqrt{(a^2-A^2t^2)(b^2-A^2t^2)}}.$$

Per la valutazione di questi due integrali è d' uopo conoscere i limiti di t. Serve a questo fine la relazione che abbiamo supposto fra t e $\operatorname{sen}\theta$, ed in tal modo ai valori -1, ed 1 di $\operatorname{sen}\theta$ trovansi rispondere per t i valori espressi rispettivamente da $\dfrac{a}{A}$, e $-\dfrac{a}{A}$. Ma l' osservazione del secondo integrale mostra chiaramente che il medesimo esser dee una funzione di t^2, dunque il valore *definito* del medesimo sarà nullo, e però non occorre darsi la pena di liberarlo dal segno $\int$.

24. L' affare trovandosi dunque ridotto alla ricerca del primo dei due integrali espressi in t, cominciamo dal decomporlo in due fattori come qui appresso

$$\int\frac{(1+t^2)(b^2-A^2t^2)}{(1-t^2)^2}\times\frac{dt}{ab\sqrt{(1-\frac{A^2}{a^2}t^2)(1-\frac{A^2}{b^2}t^2)}},$$

ed osserviamo 1.° che pel suo proprio valore b è maggiore di a; 2.° che per la natura del problema $\dfrac{A^2}{a^2}$ è sempre maggiore

dell'unità, laddove $\frac{A^2}{b^2}$ può esserne minore, uguale, ed anche un poco maggiore; 3.° e che anche sostituendo per t i suoi limiti di sopra trovati, che astrazion fatta dal segno ne sono i più grandi valori, l'espressione $\frac{A^2}{a^2}t^2$, e quindi con più ragione anche l'altra $\frac{A^2}{b^2}t^2$, non arrivano a sorpassare l'unità. Potremo dunque supporre $\frac{A}{a}t=\operatorname{sen}\psi$, con che il precedente integrale diventa

$$\int \frac{A}{b} \times \frac{(b^2-a^2\operatorname{sen}^2\psi)(A^2+a^2\operatorname{sen}^2\psi)}{(A^2-a^2\operatorname{sen}^2\psi)^2} \times \frac{d\psi}{\sqrt{(1-\frac{a^2}{b^2}\operatorname{sen}^2\psi)}},$$

e i limiti di $\operatorname{sen}\psi$, corrispondenti ai due suddetti di t, vengono uguali rispettivamente ad 1, e -1.

25. Per ridurre quest'ultimo integrale alle funzioni ellittiche, supponghiamolo uguale, sulle tracce di Legendre a

$$\frac{K\Delta\operatorname{sen}\psi\cos\psi}{1-\frac{a^2}{A^2}\operatorname{sen}^2\psi}+L\int\Delta\, d\psi+M\int\frac{d\psi}{\Delta}+N\int\frac{d\psi}{(1-\frac{a^2}{A^2}\operatorname{sen}^2\psi)\Delta},$$

dove Δ esprime per brevità il radicale $\sqrt{(1-\frac{a^2}{b^2}\operatorname{sen}^2\psi)}$, e K, L, M, N sono delle costanti indeterminate. E trovando queste ultime col principio dell'equazioni identiche, e poi moltiplicando ciò che ne risulta per $\frac{A^2-a^2}{Aa}.C$, il valore di . . . .
$\frac{(A^2-a^2)C}{Aa}\int T\,dt$, da $t=\frac{a}{A}$ sino a $t=-\frac{a}{A}$, già eguale a quello di $-\int d\theta\sqrt{[4\pi^2(A+a\operatorname{sen}\theta)^2+C^2\cos^2\theta]}$ da $\operatorname{sen}\theta=-1$ fino a $\operatorname{sen}\theta=1$, sarà quanto il valore di

$$-\frac{abC\Delta\,\mathrm{sen}\,\psi\cos\psi}{A^2\left(1-\frac{a^2}{A^2}\mathrm{sen}^2\psi\right)}+\frac{bC}{a}\int\Delta d\psi-\frac{(b^2-a^2)C}{ab}\int\frac{d\psi}{\Delta}+\frac{(b^2-a^2)C}{ab}\int\frac{d\psi}{\left(1-\frac{a^2}{A^2}\mathrm{sen}^2\psi\right)\Delta}$$

da $\mathrm{sen}\,\psi=1$ fino a $\mathrm{sen}\,\psi=-1$.

Ora tra questi limiti il valore della parte non affetta dal segno $\int$ è nullo, e quelli dei tre integrali, cioè delle funzioni ellittiche dette da Legendre di 1ª, 2ª, e 3ª specie, sono doppi dei valori che prendono fra i limiti $\mathrm{sen}\,\psi=1$, e $\mathrm{sen}\,\psi=0$, e che diconsi completi; dunque adottando (come nel trattato sulla misura delle volte) per i due primi integrali definiti la notazione del citato geometra, e per brevità facendo $\frac{a}{b}=\mathrm{sen}\,\beta$, scriveremo in vece loro $2E^1(\beta)$ e $2F^1(\beta)$; e ci contenteremo di notare con Π il terzo integrale indefinito. Se non che per rapporto ai lor valori numerici, quelli dei primi due possono, senz' altra dichiarazione, cavarsi dalle due piccole tavole da noi inserite nel trattato sulla misura delle volte, pag. 309 e 310, laddove per quelli del terzo integrale, comunque per avventura sieno completi, e perciò dipendano pure dalle funzioni ellittiche di 1ª, e 2ª specie, pur tuttavia dobbiamo distinguere tre casi, e rimetterci per ciascuno ai risultamenti ottenuti da Legendre.

1.° caso, $A<b$.

Allora $\frac{a^2}{A^2}$ è maggiore di $\frac{a^2}{b^2}$, o vero di $\mathrm{sen}^2\beta$; ma lo stesso $\frac{a^2}{A^2}$ per la genesi della nostra superficie è minore di 1; dunque per soddisfare ad un tempo le due condizioni potremo supporre

$$\frac{a^2}{A^2}=1-\cos^2\beta\,\mathrm{sen}^2\omega,$$

e dopo ciò il valore di Π, che noteremo con Π', è determinato (*) per l' equazione

$$\frac{A\cos^2\beta\,\mathrm{sen}\,\omega\cos\omega}{a}[\Pi'-F'(\beta)]=\frac{\pi}{2}+[F'(\beta)-E'(\beta)]F(90^\circ-\beta,\omega)-F'(\beta).E(90^\circ-\beta,\omega).$$

2.° *caso*, $A>b$.

Allora essendo $\frac{a^2}{A^2}$ minore di $\frac{a^2}{b^2}$ ossia di $\mathrm{sen}^2\beta$, può supporsi

$$\frac{a^2}{A^2}=\mathrm{sen}^2\beta\,\mathrm{sen}^2\omega,$$

ed il valore di Π, che chiameremo Π'', è il seguente (**) :

$$\Pi''=F'(\beta)+\frac{A\tan\omega}{\sqrt{(A^2-a^2)}}[F'(\beta).E(\beta,\omega)-E'(\beta).F(\beta,\omega)].$$

3.° *caso*, $A=b$.

In quest' ultimo caso il valore di Π, che noteremo con Π''', è semplicemente

$$\Pi'''=\sec^2\beta\,E'(\beta).$$

26. In seguito di quanto abbiamo dichiarato, tornando all' integrale doppio (21) che rappresenta la richiesta superficie, sostituendo all' integrale relativo a θ i valori già determinati pei rispettivi casi, e moltiplicandoli per $\frac{a}{2\pi}\varphi$, o piuttosto per $\frac{a}{2\pi}\times\frac{2C}{C}\pi=\frac{aC}{C}$, affin di eseguire l'integrazione relativa a φ tra i limiti stessi del num. 19, avremo finalmente nel caso di $A<b$, che si verifica quando $C<2\pi a$,

(*) Legendre, *esercisj di calcolo integrale*, n. 100, e 101.
(**) Legendre, *esercisj di calcolo integrale* n. 104, e 105.

$$S=\frac{2aC'}{\text{sen}\,\beta}\left\{E'(\beta)+\frac{a}{A\,\text{sen}\,\omega\cos\omega}\left[\frac{\pi}{2}+(F'(\beta)-E'(\beta))F(90^\circ-\beta,\omega)-F'(\beta).E(90^\circ-\beta,\omega)\right]\right\}\ (V)$$

dove gli angoli β ed ω possono determinarsi per l' equazioni

$$\cot\beta=\frac{2\pi\sqrt{(A^2-a^2)}}{C},\ \text{e}\ \text{sen}\,\omega=\frac{C}{2\pi A\,\text{sen}\,\beta};$$

nel caso di $A>b$, che ha luogo quando $C>$ di $2\pi a$,

$$S=\frac{2aC'}{\text{sen}\,\beta}\left\{E'(\beta)+\frac{\cos^2\beta\tan\omega}{\sqrt{(1-\text{sen}^2\beta\,\text{sen}^2\omega)}}\left[F'(\beta).E(\beta,\omega)-E'(\beta).F(\beta,\omega)\right]\right\}\ldots(VI),$$

dove gli angoli β, ed ω sono determinati rispettivamente per l' equazioni

$$\cot\beta=\frac{2\pi\sqrt{(A^2-a^2)}}{C},\ \text{e}\ \text{sen}\,\omega=\frac{a}{A\,\text{sen}\,\beta};$$

e nel caso di $A=b$, che si verifica quando $C=2\pi a$,

$$S=2AC'\left\{2E'(\beta)-\cos^2\beta\,F'(\beta)\right\}\ \ldots\ (VII),$$

dove l' angolo β si determina per l'equazione $\text{sen}\,\beta=\frac{a}{A}$.

CUBATURA DEI SOLIDI ELICOIDICI, E SUA APPLICAZIONE ALLE SCALE A CHIOCCIOLA, ED ALLE VOLTE CHE LE SOSTENGONO.

27. La misura dei solidi nei quali una o più facce sono delle superficie elicoidiche, nei casi necessarj per noi a considerarsi è molto più facile che non pare, poichè non differisce o si deduce con molta facilità da quella dei cilindri o pure dei solidi di rotazione. Ciò nasce dacchè *nei solidi elicoidici son uguali fra loro le sezioni parallele*, come nei cilindri, *e son uguali fra loro le sezioni per l' asse*, come nei solidi di rotazione. Sono poi questi due principj una conseguenza immediata della natura, o vero della definizione di detti solidi (1).

In virtù del primo principio ogni solido elicoidico terminato da due piani paralleli può supporsi formato di elementi cilindrici

a basi uguali, che nascono frapponendo a quei piani infiniti altri paralleli ad essi e, se si vuole, equidistanti fra loro. Ma la misura del cilindro è il prodotto della base per l'altezza; dunque *ogni solido elicoidico terminato da due piani paralleli dee valutarsi moltiplicando la sezione che vi produce uno di tali piani*, come base, *per la distanza di amendue*, come altezza.

Quindi il solido elicoidico racchiuso fra le due superficie elicoidiche determinate per l'eliche KMN, LTU, e le due superficie cilindriche projettate nelle circonferenze KLFG, *klfg*, se abbia per rimanenti suoi limiti due piani perpendicolari all' asse, dovrà misurarsi moltiplicando l' area della sezione LK*kl* per la distanza dei due piani. *Fig.* 1

E parimente il solido in cui le due superficie elicoidiche vengono generate dalla retta A*a* che si appoggia all' asse OZ, e dalla retta H*h* tangente al cilindro projettato in *ahb*, ed in cui gli altri limiti sono gli stessi di pocanzi, uguaglierà il prodotto della figura A*ah*H per la distanza dei piani paralleli. *Fig.* 2

28. Il secondo principio trova la sua applicazione nella misura dei solidi elicoidici terminati da due piani condotti per l'asse. Per assicurarcene basta considerare i due solidi generati dal rettangolo *a*AA'*a'* volgendosi una volta con moto di rotazione, ed un' altra volta con moto elicoidico attorno l' asse OZ, cui sono perpendicolari i lati opposti *a*A, *a'*A'. Difatti, supponendo che ZOB sia il piano in cui si contengono le ultime posizioni del rettangolo generatore, indicate rispettivamente da *b*BB'*b'*, *b'*B'B''*b''* è chiaro che le superficie elicoidiche *ab''*B''A, *a'b'*B'A' (*) sono *Fig* 6

(*) È prevenuto il leggitore che gli archi di cerchio o di elica frapposti a due punti sono per brevità indicati dalle sole due lettere affette a questi punti. Ciò non può essere cagione di equivoco, perchè da un punto all'altro è sempre menata una linea sola.

fia loro uguali e simili, del pari che le armille circolari $ab'B'A$, $a'bBA'$. Ma è pure simile la posizione rispettiva delle une alle altre; dunque i solidi $ab''B''AB'b'a$, $a'b'B'A'Bba'$ debbono stimarsi uguali, e però sottraendosi ad uno ad uno da tutta la figura $ab''B''AA'Bba'a$, resterà il solido di rotazione $ab'B'AA'Bba'$ equivalente al solido elicoidico $ab''B''AA'B'b'a'$.

Ora qualunque sia la figura piana generatrice del solido, nulla impedisce di supporla decomposta in elementi rettangolari per mezzo di rette parallele, e di rette perpendicolari all'asse; dunque generalmente ogni solido elicoidico terminato da due piani condotti per l'asse, è uguale a quello di semplice rotazione che si contiene dai medesimi piani, e che vien generato dalla figura prodotta per uno di essi nel solido elicoidico. Ma il detto solido di rotazione nasce dal moltiplicare la figura generatrice per l'arco circolare descritto dal suo centro di gravità, e quest'arco è la projezione dell'elica descritta dal centro stesso frattanto che quella figura genera il solido elicoidico; dunque *ogni solido elicoidico terminato da due piani condotti per l'asse, uguaglia il prodotto della figura che vi produce uno di questi piani, per la projezione dell'elica descritta dal suo centro di gravità* (frattanto che la figura stessa genera il solido) *su di un piano perpendicolare all'asse.*

29. Per confrontare adesso i due solidi dei quali abbiam di fresco trattato, e così discoprire un altro teorema che può esser utile alla loro misura, consideriamo i due che nella fig. 1 mostrano esteriormente le facce cilindriche KLM, K'L'M'. Essi non son diversi dai due rappresentati nella fig. 6. da $AB'B''b''b'a$, $A'BB'b'ba'$, e perciò debbono stimarsi uguali fra loro; dunque aggiungendo a ciascuno il solido che fa mostra della faccia K'L'LM, i due che n'emergono colle facce KLL'K' ed LMM'L' saranno parimente uguali. Ma lo stesso ragionamento può applicarsi a qualsivoglia solido elicoidico, dunque *in ogni solido*

Fig. 1

elicoidico indefinito , se per due punti di un elica qualunque si menino due piani per l' asse , e due piani perpendicolari all' asse (o soltanto paralleli fra loro) , la porzione del solido racchiuso fra i primi sarà uguale a quella terminata dai secondi.

Se dunque si cercasse il volume di uno dei due solidi considerati nei num. 27 e 28 , ignorando l' area della figura che ne costituisce un fattore , si potrebbe vedere se mai è più facile ad ottenersi l' area della figura ch'è un fattore del volume dell' altro solido, e nel caso affermativo si troverebbe agevolata la misura del primo solido in virtù del teorema pocanzi espresso.

30. Supponghiamo che i limiti piani del solido siano un piano come LoK perpendicolare all' asse , ed un altro piano condotto per l' asse come *ros*. Prendendo nell' elica KMN l'arco *s*K' uguale ad *r*L, e nell' elica LTU l' arco *r*L' uguale ad *s*K , sarà l' arco KK' uguale all' arco LL' , e quindi i punti L' e K' si troveranno , al pari dei due L e K , in un piano perpendicolare all'asse. Da ciò si fa chiara l' equivalenza dei due solidi le di cui facce cilindriche esteriori sono K*sr*L e K'*sr*L' , onde ciascuno sarà metà del solido la cui faccia esteriore è KK'L'L, o pure (condotta la L'M' parallela all'asse) del solido che mostra la faccia LL'M'M. Ma la misura di questi si tien conosciuta per le cose precedenti, tale adunque dovrà stimarsi anche quella di ciascuno dei primi. *Fig.* 1

31. Innanzi di passare ai solidi che non hanno se non una sola faccia elicoidica , osserveremo che la dimostrazione recata nel n. 28 è indipendente dalla natura delle curve A'MB, A'NB' e delle altre analoghe : il che importa che qualunque siano le curve A'MB , *a'mb* le quali servono di basi a due superficie cilindriche di lati paralleli , considerando il parallelogrammo *aa'*A'A di cui due lati opposti *aa'* , AA' appartengono alle superficie cilindriche , se per gli altri due lati si facciano passare *Fig.* 6

5

due piani fra loro paralleli $ab'B'A$, $a'bBA'$, e due superficie curve $ab''B''A$, $a'b'B'A'$ simili, e similmente poste per rapporto a questi piani, e se tanto dei due piani che delle due superficie curve si considerino le sole parti intercette alle superficie cilindriche, al piano primitivo $aa'A'A$, ed al piano $bb''B''B$ condotto per due altri lati qualunque delle superficie cilindriche, i solidi $ab'B'AA'Bba'$ ed $ab''B''AA'B'b'a'$ saranno equivalenti. Ma il primo di questi, per esser cilindrico, si valuta moltiplicando la sua base $ab'B'A$ per la sua altezza ossia distanza dei piani paralleli; questa dunque sarà eziandio la misura dell'altro solido, la quale per tal ragione potrà stimarsi nota.

32. Tornando adesso all'ipotesi primitiva che gli archi $a'mb$, $A'MB$, ec. siano circolari, e che gli altri $a'nb'$, $A'NB'$, ec. sieno elicoidici, cerchiamo la misura del solido $a'b'B'A'Bba'$, di cui una sola faccia è elicoidica.

A tal fine supponghiamo divisi gli angoli $AO'B'$, $A'OB$ in uno stesso numero di parti elementari, e considerando i due $AO'P$, BOQ , fingiamo che i piani $OO'P$, $O'OQ$ taglino la superficie elicoidica $a'b'B'A'$ nelle rette $p'P'$, $q'Q'$. I solidi $app'a'$-$APP'A'$, e $bqq'b'$-$BQQ'B'$ saranno elementari per rispetto degli altri $ab'a'$-$AB'A'$, e $ba'b'$-$BA'B'$, e l' uguaglianza di quest' ultimi sarà un effetto dell' uguaglianza dei primi.

Per assicurarci ora di questa uguaglianza consideriamo l'elica $Rr'sS'$ vicinissima all'altra $A'NB'$, che abbia per projezioni sui piani $AO'B'$, $A'OB$ gli archi circolari RrS' , ed $R'sS$; e che tagli in r' ed s' le rette $p'P'$, $q'Q'$. I solidi $Rrr'R'$-$APP'A'$, ed $Sss'S'$-$BQQ'B'$ saranno ugualmente elementari per rapporto ai precedenti. Inoltre i medesimi possono riguardarsi come poliedri a facce piane, e queste facce sono visibilmente uguali ciascuna a ciascuna, ed inclinate sotto gli stessi angoli. Essendo dunque per tal ragione uguali fra loro i volumi di questi solidi, tali pur saranno quelli dei precedenti $app'a'$-$APP'A'$, $bqq'b'$-

BQQ'B', e tali infine quelli dei solidi primitivi $ab'a'$-A B'A', e $ba'b'$-BA'B'. Ma questi due ultimi formano insieme il solido $ab'ba'$-A B'B A', il quale per essere di natura cilindrica si misura moltiplicandone la base per l' altezza; dunque *ciascuno dei primi dovrà stimarsi quanto il prodotto della base per la metà dell' altezza.*

33. E' del pari, esprimendosi col prodotto della base $a'b$BA' per la metà di BB'' il solido contenuto fra quella base, e la superficie elicoidica che passerebbe per le rette a'A' e b''B'', se ne deduco che *il solido compreso fra questa superficie elicoidica e la primitiva* a'b'B'A' *dovrà stimarsi* quanto il prodotto di $a'b$B A' per la metà di B'B'', cioè a dire *quanto il prodotto della projezione ortogonale delle sue facce elicoidiche nella metà della sua altezza.*

34. Vale quì la pena di osservare che l' eguaglianza degli angoli AO'P, BOQ non porta seco quella delle figure apPA, bqQB se non quando gli archi AP, BQ appartengono a cerchi uguali del pari che gli altri ap, bq. Quindi la precedente misura del solido $a'bb'$-A'B B' non avrà luogo quando le linee A'MB, $a'mb$ si compongono di archi circolari fra loro raccordati ma spettanti a cerchi diversi. Ma non per questo ci resterà ignota la misura del solido in tal caso: percioccbè supponendo essere A'M, $a'm$ due archi circolari descritti col centro F; ed MB, mb due altri archi circolari descritti col centro G posto per diritto coi punti M, m, F, niente impedisce che quel solido si consideri diviso negli altri $a'mn$-A'MN, ncb'-NCB', ed $mncb$-MNCB, dei quali i primi due si misurano moltiplicando le basi per le metà delle altezze, ed il terzo di natura cilindrica è quanto il prodotto della base mbBM per l' altezza intera BC.

35. Dopo le cose dichiarate dal n.° 27 in poi, la cubatura delle scale elicoidiche o delle volte che le sostengono è alla portata di chiunque.

Consideriamo da prima quella in cui la superficie opposta ai gradi della scala è di natura elicoidica e rettangolare, ed oltre ai simboli adoperati nel n. 11 notiamo con c l' altezza LM (*fig. 1*) del solido elicoidico dove i gradi della scala possono riguardarsi come scolpiti, e con c' l' altezza rs (*fig. 4, 5*) della faccia verticale e visibile di ciascun grado, volgarmente detta *alzata*. La base del medesimo solido sarà $lkKL$ (*fig. 1*), e per trovarne l' espressione si osserverà che dessa è quarta proporzionale in ordine alla circonferenza FGKL, all' arco LK, ed all' armilla contenuta fra questa circonferenza e l' altra $fgkl$. Ora per la natura dell' elica KMN alla prima ragione può sostituirsi quella del passo KQ alla retta LM, ossia di C a c, e la detta armilla si esprime visibilmente per la formola $\pi(a'^2-a^2)$; quella dunque della base $lkKL$ sarà $\pi\frac{c}{C}(a'^2-a^2)$, e moltiplicandola per l' altezza C' della scala, il volume del solido elicoidico di cui si tratta verrà (27) indicato da $\pi\frac{C'}{C}c(a'^2-a^2)$ . . . . (P).

Fig. 1

Tale qual' è questa formola esprime il rilievo della vite rettangolare, di cui nel n.° 13 trovammo la superficie elicoidica. Unendovi il cilindro su di cui tal rilievo è come avviluppato, e che si esprime per $\pi a^2C'$, la solidità dell' intera vite a rilievo rettangolare viene uguale a $\pi\frac{C'}{C}[a^2(C-c)+a'^2c]$. . . (VIII).

36. Ma per rapporto alla scala, quando lo sviluppo dell' intersezione cilindrica dei suoi gradi è quale si mostra nella fig. 4 convien togliere da quella formola un' altra equivalente al vano che per la scoltura dei gradi si produce nel solido elicoidico; e quando il detto sviluppo ha la forma indicata nella fig. 5, conviene toglierne dippiù l' ammontare dei vani nascenti dalla discontinuità del sotto scala.

Nella prima ipotesi ciascun dei vani hà la figura conside-

rata nel n.° 32, e mentre la loro altezza è costante, le basi ossiano facce orizzontali (volgarmente dette *pedate*) per un giro intero della scala formano insieme l'armilla circolare compresa fra le circonferenze $fgkl$, FGKL. Ma quell'altezza è c', *Fig.* 1 l'armilla è $\pi(a'^2-a^2)$, e l' espressione numerica dei giri è per l' intera scala $\frac{C'}{C}$, dunque l' insieme di tutti i vani verrà espresso da $\pi(a'^2-a^2)\times\frac{c'}{2}\times\frac{C'}{C}=\frac{\pi}{2}\frac{C'}{C}c'(a'^2-a^2)$, e sottraendo questa formola dalla precedente resterà per volume effettivo della scala

$$\frac{\pi}{2}\frac{C'}{C}(a'^2-a^2)(2c-c')\ .\ .\ .\ (\text{IX}).$$

37. Nella seconda ipotesi la figura degl' incavi nascenti dalla discontinuità del sotto-scala non è diversa che nella posizione da quella considerata nel n.° 36, ed è chiaro ugualmente che per un giro completo della scala le projezioni della loro superficie elicoidiche formano insieme la stessa armilla. Se dunque notiamo con c'' la minore altezza ut' (*fig.* 5) di ciascun grado, opposta all' altra rs indicata sempre da c', la somma di tutti quegl' incavi sarà espressa da $\frac{\pi}{2}\frac{C'}{C}c''(a'^2-a^2)$, e perciò sottraendo questa formola dalla precedente, resterà

$$\frac{\pi}{2}\frac{C'}{C}(a'^2-a^2)(2c-c'-c'')\ .\ .\ .\ .\ (\text{X})$$

per volume effettivo della scala elicoidica, il di sotto della quale presenta un sistema discontinuo di piccole facce piane verticali, e di facce curve elicoidiche dirette per l'asse della scala.

38. Avendo osservato che per la formola (VIII) può misurarsi il rilievo della vite rettangolare, non dobbiamo omettere quella che si riferisce alla vite triangolare, il di cui uso è più frequente. In questa la figura generatrice del rilievo è un trian-

golo isoscele di cui possiamo esprimere la metà col triangolo
Fig.1 rettangolo AHK, supponendo che l' altra metà abbia comune colla prima la base AH. Ora destinando la lettera c ad esprimere la HK, e ritenendo il significato dell' altre lettere abbiamo per area del triangolo generatore la formola $(a'-a)c$.

Inoltre essendo centro di gravità del medesimo triangolo il punto della HA distante da O quanto $OH+\frac{1}{3}HA=\frac{2a+a'}{3}$, l'arco circolare ch'è projezione di quello dell'elica descritta da cotal punto durante la generazione della vite sarà, per la natura di questa curva, quarto proporzionale in ordine a C, C' e $\frac{2}{3}\pi(2a+a')$, e però uguale a $\frac{2\pi C'}{3C}(2a+a')$. Se dunque moltiplichiamo quest' arco per la figura generatrice la solidità del rilievo della vite nascerà (28) espressa da

$$\frac{2\pi C'}{3C}c(2a+a')(a'-a).$$

Nella vite comunemente in uso la superficie del cilindro di dove sporge il rilievo non è altrimenti visibile, che per una traccia lineare esprimente l' elica descritta dal punto K. Ciò è indizio che il passo di quest' elica e di quelle descritte da tutti gli altri punti della figura generatrice, è quanto il doppio della HK. È dunque in tal caso $C=2c$, e quindi la formola della solidità del rilievo si riduce più semplicemente a

$$\frac{\pi}{3}C'(2a+a')(a'-a) \quad . \; . \; . \; . \quad (Q).$$

A questa unendo la solidità del nominato cilindro, espressa da $\pi a^2 C'$, quella della vite propriamente detta risulta espressa dopo le riduzioni dalla formola

$$\frac{\pi}{3}C'(a^2+aa'+a'^2) \quad . \; . \; . \quad (XI),$$

la quale esprime pure, come è noto dagli elementi, un tronco

di cono che ha per raggi delle basi a , a' , e per altezza C'. *La vite triangolare è dunque uguale in solidità ad un tronco di cono di uguale altezza , e che ha per basi quelle del cilindro circoscritto e del cilindro iscritto al rilievo della vite.*

39. Consideriamo adesso il caso in cui la superficie del sotto-scala è bensì elicoidica , ma condizionata a toccare il cilindro minore formante il *nocciolo o fuso* della scala , in luogo di passare pel di lei asse.

Per la generazione della medesima superficie data nel n.° 9, la base del solido elicoidico , dove i gradi della scala possono in tal modo riguardarsi scolpiti, è la figura $ahHA$ in cui giova ricordare che $Oa=a$, $OA=a'$, ed ang. $hoH=\gamma$. A ritrovarne l' espressione osserveremo che $ahHA=aiHA+HOh-iOh$; ma *Fig.* 2

in virtù del n.° 35 abbiamo $aiHA=\pi\frac{c}{C}(a'^2-a^2)$, e dippiù

$HOh=\frac{Oh}{2}\times hH=\frac{a}{2}\sqrt{(a'^2-a^2)}$ ed $iOh=\frac{Oh}{2}\times \text{arco}\, hi=\frac{a}{2}\times a\gamma$;

dunque sarà da prima

$ahHA=\pi\frac{c}{C}(a'^2-a^2)+\frac{a}{2}\sqrt{(a'^2-a^2)}+\frac{a^2}{2}\gamma$. Frattanto per essere

$\text{tang}\,\gamma=\frac{\sqrt{(a'^2-a^2)}}{a}$, viene $\sqrt{(a'^2-a^2)}=a\,\text{tang}\,\gamma$, ed $a'^2-a^2=a^2\text{tang}^2\gamma$;

dunque sostituendo avremo l' area della base . . . .

$ahHA=a^2[\pi\frac{c}{C}\text{tang}^2\gamma+\frac{1}{2}(\text{tang}\,\gamma-\gamma)]$. Moltiplicando adesso questa base per l'altezza C' della scala, e dal prodotto sottraendo la formola che esprime i vani nascenti dalla scoltura dei gradi , e che si trovò nel n.° 36, il residuo che può ridursi alla forma

$$\frac{a^2C'}{2}[\pi\tan^2\gamma\frac{2c-c'}{C}+\tan\gamma-\gamma] \quad . \ . \ . \ (XII)$$

dinoterà il volume effettivo della scala di cui ora si tratta.

40. Finalmente consideriamo il caso in cui i gradi della scala vengon sostenuti da una volta di cui essi non fanno parte, che ha per intradosso la superficie elicoidica generata da un semicerchio e considerata nel n.° 10.

All'uopo di misurare questa volta osserviamo che, quantunque essa venga d'ordinario generata da una figura simile ad $fgh \ldots mm' \ldots h'g'f'$, può nondimeno supporsi prodotta dal rettangolo ADda, dacchè le porzioni delle quali si viene a diminuire per effetto di tale ipotesi fanno parte del muro circolare esterno, e del nocciolo o del muro circolare interno: che sono i piè dritti della volta, e di cui è notissima la misura. Allora il modo per noi più semplice onde pervenire allo scopo è di sottrarre il solido generato dal semicerchio aCA, dal solido che produce il rettangolo adDA. In riguardo a quest'ultimo, ricordando che nella scala di cui ora si tratta IA$=a$, ed OI$=A$, avremo O$a$$=A-a$ ed OA$=A+a$, quindi il binomio $a^2-a'^2$ che rattrovasi nella formola (P) del n.° 35 per esprimere $\overline{OA}^2-\overline{Oa}^2$, verrà nel caso attuale rimpiazzato da $(A+a)^2-(A-a)^2$ o vero da $4aA$, ed il solido generato dal detto rettangolo tornerà espresso da $4\pi aAc\frac{C'}{C}$ dove C, C', e c continuano a dinotare il passo dell'elica, l'altezza della scala, e quella del rettangolo.

Fig. 3

41. Rispetto poi del solido generato dal movimento elicoidico del semicerchio aCA, ad evitare il calcolo necessario per valutarne la base orizzontale, gliene sostituiremo un altro il quale coi medesimi archi dell'eliche generate dai punti a, A, abbia per limiti due piani verticali menati per l'asse della volta. Questo nuovo solido è uguale al primo (29), ma per la condizione dei suoi limiti è più facile a misurarsi. Difatti l'area del semicerchio aCA donde vien generato è $\frac{\pi}{2}a^2$. La projezione poi dell'elica descritta dal suo centro di gravità, o che torna lo

stesso, dal punto I, si esprime da $2\pi A$ per un giro completo della scala ossia per l'altezza C di essa; quindi sarà uguale a

$2\pi A\frac{C}{C}$ per l'intera sua altezza C', stante la proporzionalità che per la natura dell'elica ha luogo (1) fra le altezze e le projezioni dei suoi archi. Dunque moltiplicando questa formola per

$\frac{\pi}{2}a^2$, il solido elicoidico di cui si tratta, ossia il vano della volta

sarà espresso da $\pi^2 a^2 A\frac{C}{C}$; e sottraendolo dal solido prima calcolato (40), che si genera dal rettangolo $adDA$, resterà la formola

$$V=\pi a A\frac{C}{C}(4c-\pi a)\ .\ .\ .\ \text{(XIII)}$$

per esprimere il volume di quella parte della volta, che rimane frapposta alla faccia esterna del nocciolo o del muro circolare interno, ed alla faccia interna del muro circolare esterno.

Questa medesima formola ci darà, quando bisogna, l'intero volume della volta, aggiungendole i solidi elicoidici generati dai rettangoli Ag, hn, ec., e misurati colla regola espressa nel n.° 27, o colla formola (P) del n.° 35.

42. Quando all'angustia del luogo di cui può disporsi per la costruzione di una scala, si aggiunge che il medesimo è più lungo che largo, la scala riuscirà più comoda dandole per pianta una figura ovale che abbia per assi tal lunghezza e larghezza, di quello sarebbe dandole per pianta un cerchio avente per diametro la larghezza. Per verità una delle curve $aba'b'$, ABA'B', *Fig.* 7 che suppongo essere le rispettive projezioni della faccia esteriore del nocciolo o del vôto interno, e della faccia interna del muro esteriore, potrebbe essere una ellisse, ma l'altra in tal caso non sarebbe tale: imperocchè le due curve dovendo esser sempre equidistanti, affinchè i gradi della scala vengano di una stessa

lunghezza, fa d' uopo che l' ellisse e l' altra curva siano evolventi di una medesima terza curva : ciocchè rende tantoppiù malagevole la costruzione della scala, quanto che la medesima vuol esser formata, come si sa, di pietre da taglio. Al contrario supponendo che le curve $aba'b'$, $ABA'B'$ sieno due ovali descritte coi medesimi centri, la loro equidistanza è assicurata, e in pari tempo si favorisce non poco la economia e l' esattezza del lavoro. Per questa ragione adunque, e perchè nell' una e nell' altra ipotesi i risultamenti della misura non possono differire gran fatto un dall' altro, noi riguarderemo sempre le due curve come ovali.

La definizione dell' elica essendo sempre quella del n.° 1, e riguardando le ovali come descritte con quattro centri, due dei quali sono F e G, supponghiamo per I.° caso che la generatrice orizzontale della superficie elicoidica del sotto-scala passi per la verticale eretta dal punto F, quando si appoggia a quel tratto dell' elica direttrice il quale è projettato in MAN; e similmente passi per la verticale innalzata dal punto G allorchè si appoggia al tratto di elica projettato in MBM'.

La superficie elicoidica projettata in $AMma$ sarà data per la formola

$$S=\frac{C^2\varphi}{8\pi^2}\left[\frac{\cot\alpha'}{\operatorname{sen}\alpha'}-\frac{\cot\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}+\lambda\left(\log\cot\frac{\alpha}{2}-\log\cot\frac{\alpha'}{2}\right)\right]\ldots(\text{XIV}),$$

che nasce dal sostituire nell' altra (I) a C' il suo valore in φ espresso per $\frac{C\varphi}{2\pi}$. Se non che nella determinazione degli angoli α ed α' per mezzo dell' equazioni

$$C=2\pi a\tan\alpha\,,\quad C=2\pi a'\tan\alpha',\quad (\text{H})$$

bisogna prendere per a ed a' le rette Fa, FA. Deve poi φ esprimere l' arco di raggio 1, e di seno $\frac{mp}{mF}$.

La formola (XIV) darà parimente la superficie elicoidica projettata in $BMmb$, quando in trovare α ed α' mediante l'equazioni (H), s' intendano per a ed a' le rette Gb e GB, e per φ si prenda l'arco avente per seno $\frac{mq}{mG}$.

La quadrupla somma di tali due superficie esprime quella che appartiene al sotto-scala per ogni giro completo della scala. L'altra poi che si riferisce ad una frazione qualunque di giro, che può esservi di avanzo, e che può in vario modo partecipare delle due che abbiamo considerate, ognun vede che dipende ancora dalla sua posizione in pianta, ma è chiaro che può egualmente dedursi dalla formola (XIV).

43. Per II.° caso prendiamo quello in cui la superficie del sotto-scala vien generata come fu detto nel n.° 9. Allora necessità ci obbliga di esser brevissimi: perciocchè la misura esatta di tal superficie impegnerebbe in calcoli assai lunghi, e per una misura che non sia molto discosta dal vero può ritenersi la precedente.

44. Finalmente riguardiamo come III.° caso quello in cui la superficie del sotto-scala è generata, come nel n.° 10, dal moto elicoidico di un semicerchio il di cui piano rota successivamente attorno le verticali erette dai punti F, G, ec. Allora per aver le superficie projettate in $AMma$ e $BMmb$ bisogna far capo, secondo che C è minore, maggiore, o pure uguale a $2\pi a$ dalla prima, dalla seconda, o dalla terza delle formole (V), (VI), (VII). In queste, dopo aver sostituito a C' il suo valore in φ espresso da $\frac{\varphi}{2\pi}C$, ad oggetto di farle indicare il valore della superficie indefinita per rapporto a φ, si prenderà una volta per a la retta $a\alpha$ metà di aA, per Δ la retta Fa, e per φ l'arco

avente per seno $\frac{mp}{mF}$; ed un'altra volta per a la retta $b\beta$ metà di bB e perciò uguale ad $a\alpha$, per A la retta $G\beta$, e per φ l'arco che ha per seno $\frac{mq}{mG}$, e che perciò è complemento del primo. Ed in ciascuna ipotesi, osservando quale dei tre casi abbia luogo, ciascuna delle superficie $AMma$, $BMmb$ verrà espressa dalla formola corrispondente ad un tal caso.

Il quadruplo della somma delle due superficie così misurate è quì, come nel 1.° caso, la superficie del sotto-scala per ogni giro completo della scala. Ma quanto a ciò che può esservi di avanzo oltre i giri completi, per non impegnarsi in calcoli assai lunghi, bisogna esser contento di surrogargli la superficie frapposta a due piani verticali menati per l'asse e per gli estremi punti di quel tratto di elica il quale appartiene ad un tale avanzo, considerando, come nel n.° 29, il difetto di questa superficie dalla prima verso la base come uguale all'eccesso dell'una sull'altra verso la cima: ciocchè in generale non è vero che approssimativamente.

45. Senz' altra dichiarazione circa la superficie curva delle scale elicoidiche di pianta ovale, passo ad occuparmi del loro volume, al quale si attacca d'ordinario una maggiore importanza.

Nel 1.° caso, a valutare il solido di cui fan parte i gradi della scala, dal piano orizzontale onde cominciano sino a quello in cui terminano, non si può far uso della regola dichiarata nel n.° 27, perchè le sezioni orizzontali del medesimo sono variabili a motivo della pianta ovale. Ma se ai detti limiti si sostituiscono due piani verticali, menati per l'asse e per gli estremi punti dell'elica direttrice del sotto-scala, questo nuovo solido potrà valutarsi col principio dichiarato nel n.° 28, e non differirà dal primo se non nella ipotesi, che la base inferiore di

questo sia parte di una delle figure MAN-man, $M'A'N'$-$m'a'n'$, mentre la base superiore è parte di una delle figure MBM'-mbm', $NB'N'$-$nb'n'$; perchè nella ipotesi contraria l'eccesso del nuovo solido sul primitivo, verso la cima, è (29) precisamente uguale al difetto dell' uno dall' altro verso la base. Per verità, anche nella prima ipotesi potrebbero misurarsi (34) partitamente il difetto e l'eccesso, per tener conto della loro differenza; ma se voglia disprezzarsi l' errore che può nascere da cotal divario, il detto solido elicoidico potrà misurarsi, prendendo tante volte l'intero contorno della ovale $\alpha\beta\alpha'\beta'$ (equidistante dalle due $AB\,ab$, $A'B'a'b'$) quanti giri completi hà la scala, aggiungendovi quella porzione dello stesso contorno la quale corrisponde ai gradi che vi sono al di là dei giri completi, e finalmente moltiplicando la somma ottenuta per l'area del rettangolo generatore, ossia per la lunghezza dei gradi e per la spessezza della scala.

Dobbiamo adesso dal solido così misurato sottrarre gl' incavi prodotti nel medesimo per la scoltura dei gradi. La misura di essi, per ogni giro completo della scala è, come nel n.° 36, quanto il prodotto dell'armilla compresa fra le due ovali $ABA'B'$, $aba'b'$ nella metà dell' altezza costante dei gradi; e per una frazione di giro uguaglia del pari il prodotto della corrispondente parte dell' armilla nella stessa metà di altezza. Ma secondo la regola di Guldino l'armilla intera, od una sua parte, si misurano moltiplicando la retta generatrice aA per l'intero contorno dell' ovale media $\alpha\beta\alpha'\beta'$, o per la parte corrispondente a quella dell' armilla; dunque l'insieme degl'incavi nascenti dalla scoltura dei gradi, uguaglierà il prodotto della stessa somma pocanzi fatta dei contorni e porzioni di contorno di questa ovale, per la lunghezza e per la metà dell' altezza dei gradi; e però, dovendo sottrarre questo prodotto dal precedente, la regola onde misurare il volume definitivo della scala di cui si tratta, potrà essere la seguente :

1.° Prendasi tante volte il contorno dell' ovale media alle due che servono di limiti alle lunghezze dei gradi, quanti sono i giri completi della scala, e vi si aggiunga quella porzione dello stesso contorno, la quale corrisponde ai gradi che vi sono al di là dei giri completi.

2.° Dalla spessezza della scala (ossia dalla distanza verticale dello spigolo di un grado qualunque dalla retta che gli è parallela nella superficie del sotto-scala) tolgasi la metà dell' altezza costante dei gradi.

3.° E finalmente si moltiplichi quella somma per questa differenza, e per la lunghezza costante dei gradi. Il prodotto esprimerà il volume della parte massiccia della scala.

46. Per tradurre questa regola in linguaggio analitico, ritenendo c e c' ad esprimere la spessezza della volta e l'altezza dei suoi gradi, chiameremo H ed h i semiassi O A ed O B dell' ovale ABA'B', che rappresenta la projezione della faccia interna del muro esteriore; R', r' i raggi G B, F A degli archi circolari ond' essa è formata; ed R, r i raggi dei cerchi onde si compone l'ovale $aba'b'$, che indica la projezione della faccia esteriore del fuso, o del muro interno. Avremo

$$aA = bB = r' - r = R' - R,$$

$$\alpha F = \frac{1}{2}(aF + AF) = \frac{1}{2}(r + r'), \quad \beta G = \frac{1}{2}(bG + BG) = \frac{1}{2}(R + R'),$$

$$\frac{mp}{mF} = \frac{GO}{GF} = \frac{R' - h}{R' - r'}, \quad \frac{mq}{mG} = \frac{FO}{FG} = \frac{H - r'}{R' - r'}.$$

Quindi

$$\text{arco}\,\alpha\mu = F\alpha\,\text{arc.sen}\,\frac{mp}{mF} = \frac{1}{2}(r + r')\,\text{arc.sen.}\,\frac{R' - h}{R' - r'},$$

$$\text{arco}\,\beta\mu = G\beta\,\text{arc.sen}\,\frac{mq}{mG} = \frac{1}{2}(R + R')\,\text{arc.sen}\,\frac{H - r'}{R' - r'},$$

ed in conseguenza

$$\alpha\beta\alpha'\beta' = 2(r+r')\text{arc.sen}\frac{R'-h}{R'-r'} + 2(R+R')\text{arc.sen}\frac{H-r'}{R'-r'},$$

o vero, per essere

$$r'-r = R'-R\text{, ed arc.sen}\frac{R'-h}{R'-r'} + \text{arc.sen}\frac{H-r'}{R'-r'} = \frac{\pi}{2},$$

$$\alpha\beta\alpha'\beta' = \pi(r+r') + 4(R'-r')\text{arc.sen}\frac{H-r'}{R'-r'}.$$

Se dunque notiamo con n il numero dei giri completi della scala, e con e la porzione del contorno $\alpha\beta\alpha'\beta'$ sottoposta ai gradi che sono al di là dei giri completi, la formola che esprime il risultamento dell' anzidetta regola sarà

$$V = (c - \frac{c'}{2})(r'-r)\left\{e + n[\pi(r+r') + 4(R'-r')\text{arc.sen}\frac{H-r'}{R'-r'}]\right\} \quad (XV).$$

Vuolsi notare che il terzo fattore di questa formola, la di cui ricerca ci ha più a lungo occupati, esprime la somma motivata nel n.° 1 dell' anzidetta regola. Quindi se fingiamo tra loro uguali (come da alcuni autori si raccomanda) le larghezze dei gradi misurate sulla linea $\alpha\beta\alpha'\beta'$, quel fattore diverrà semplicemente Nl, notando con l la detta larghezza media di ciascun grado, e con N il numero dei gradi; e così il volume della scala tornerà espresso da

$$V = Nl(c - \frac{c'}{2})(r'-r) \ldots (XV').$$

47. Nel II.° caso può ritenersi la stessa misura del I.°, affine di non impegnarsi in calcoli soverchiamente lunghi e composti.

48. E finalmente nel III.°, prendendo per c la spessezza IE della volta che sostiene la scala, si avrà il volume di essa togliendo dal solido generato dal rettangolo $a d$DA l' altro che vien generato dal semicerchio aCA, e che dee misurarsi moltiplicando *Fig.* 3

l'area di questo semicerchio per la somma a cui si perviene col n.° 1.° di tal regola. Ma per essere $aA = r' - r$, quest'area vien indicata da $\frac{\pi(r'-r)^2}{8}$; dunque l'espressione del volume della volta sarà

$$(r'-r)\left[c-\frac{\pi}{8}(r'-r)\right]\left\{e+n\left[\pi(r'+r)+4(R'-r')\,\text{arc.sen}\,\frac{H-r'}{R'-r'}\right]\right\} \text{(XVI).}$$

49. Facendo uso degli integrali indefiniti che si ebbero nei num. 25 e 26, e che sono delle funzioni ellittiche incomplete, non sarebbe difficile il misurare approssimativamente anche la volta, il di cui intradosso è una superficie elicoidica che ha per generatrice una semi-ellisse in luogo di un semicerchio, e ciò mediante il ripiego di sostituire a tal curva la semiovale descritta coi medesimi assi e col massimo raccordamento; ma non voglio rendere più lunga quest'appendice al trattato della misura delle volte, con occuparmi di una scala che forse non si è mai costruita.

50. Trovo invece più utile di terminarla con qualche osservazione relativa alla cubatura di quella specie di scale a giorno in dove i muri di recinto son dritti, e quindi la loro sezione orizzontale è un poligono. Si comincia allora la costruzione della *Fig.* 8 scala iscrivendo a questo poligono una curva ABC . . . (che sovente può formarsi con archi di cerchi diversi fra loro raccordati) di cui si fa uso per dividere lo spazio interno in due parti destinate una pei gradi, e l'altra pel così detto *giorno*; quest'ultima è terminata da una superficie cilindrica verticale che ha per base una curva ROS... Dopo ciò si stabilisce la minor distanza, alla quale bisogna tenersi da questa curva quando si monta su per la scala, ed a tal distanza si traccia una terza curva *lmn* . . . parallela puranche alle prime due. Divisa questa in archi di ugual lunghezza, pei punti di divisione si menano come più conviene delle rette, che si riguardano come projezioni

degli spigoli orizzontali dei gradi. Prolungando queste rette finchè s'incontrino successivamente la prima colla seconda, la seconda colla terza, e così appresso, nasce un poligono limite di una curva continua ROS .... tangente ai suoi lati.

Ora le altezze dei gradi essendo sempre uguali, i punti dove i loro spigoli orizzontali incontrano la superficie cilindrica projettata nella curva *lmn* ... vi produrranno un' elica (1); ma non sarà lo stesso dei punti ove incontrano le superficie cilindriche projettate nell'altre due curve ABC ..., *abc* ..., nè quindi la superficie continua che passa pei medesimi spigoli sarà elicoidica (2), ma soltanto rigata. Simile e parallela a questa è la superficie del sotto-scala, che nasce dal concepire nei piani verticali degli spigoli (ossia nelle *alzate* dei gradi) altrettante rette parallele ed ugualmente lontane da essi.

51. Da questa compendiosa descrizione della scala, e da quel che si disse nel n.° 28 si deduce facilmente, che il solido compreso fra le dette due superficie rigate, e le due superficie cilindriche projettate nelle curve ABC ..., *abc* ..., e i due piani verticali menati pegli spigoli del primo e dell'ultimo grado, può stimarsi generato dal rettangolo che ha per base la distanza delle curve ABC ..., *abc* ..., e per altezza la distanza verticale delle due superficie rigate, a patto che il piano di esso tocchi sempre la superficie cilindrica projettata nella curva ROS..., rotando istantaneamente intorno ai di lei lati successivi. Pertanto il volume di cotal solido uguaglierà il prodotto del rettangolo generatore per la lunghezza della curva $\alpha\beta\gamma$ ..., parallela ed ugualmente lontana dalle due ABC ..., *abc* ...; o pure il prodotto dell'area della figura *p*PABQ*qbap*, terminata da queste curve e dalle projezioni degli spigoli del primo e dell'ultimo grado, per la distanza verticale delle due superficie rigate.

Questo risultamento non potrebb'essere più esatto, nè differisce da quello si otterrebbe quando la nominata figura fosse una

porzione di armilla circolare. Lo stesso non sarebbe della misura dei vani nascenti dal riguardare i gradi come scolpiti nel solido già ottenuto, quando volesse effettuarsi moltiplicando le loro facce orizzontali per la metà della loro altezza costante; perchè queste facce, prese ancora ad una ad una, non possono considerarsi rigorosamente come parti di armille circolari. Ma nondimeno dee convenirsi, che così operando si è molto dappresso al vero.

52. La maggiore difficoltà consiste nella misura di quella porzione del solido continuo e dei vani prodotti in esso dai gradi, la quale si projetta nello spazio compreso fra la curva PABC.., ed il poligono HKL . . . Tuttavia, se credesi bastare una certa approssimazione, sarà lecito effettuarla coi medesimi principj, ed allora *per misurare una parte qualunque della scala, basterà moltiplicarne la pianta per la differenza tra la spessezza verticale della scala, e la metà dell' altezza dei suoi gradi.* Bisogna però esser persuaso che così facendo non si vuol servire che alla brevità: poichè sebbene la curva *lmn* . . . non sia, generalmente parlando, esprimibile con una equazione, tuttavia per chi non è sgomentato dalla lunghezza dei calcoli, può l'esattezza dei risultamenti spingersi oltre quanto si vuole col metodo integrale, in virtù di cui tutte queste misure non sono finalmente che un giuoco, per servirmi della faceta espressione del Montuclas.

Per dimostrarlo osserviamo che la curva *lmn* . . . . può sempre dividersi in un certo numero di archi da potersi stimar circolari. Sia dunque *mn* uno di questi archi, ed abbia per centro il punto O. La superficie storta che passa pegli spigoli orizzontali dei gradi, e l' altra simile e parallela del sotto-scala, considerate ciascuna per la parte projettata in *m*O*n*, non saranno diverse dalle ordinarie. Siano *rs't* ed *eg* le sezioni curvilinee che queste superficie producono nel piano verticale menato per

KL, piano che supponghiamo abbattuto sull'altro mOn, rotando attorno la loro comune sezione KL, come si usa nella geometria descrittiva. Sia X il punto dove la curva $rs't$ incontra la retta in cui si tagliano il piano verticale menato per KL, e l'altro parimente verticale che passa per O e gli è perpendicolare. Il punto dove il piano orizzontale menato per X incontra la verticale che passa per O sarà l'origine delle coordinate x, y, z; e propriamente l'orizzontale espressa in projezione sul piano KOL da OX sarà l'asse delle x, e la detta verticale sarà quello delle z. Vuolsi notare che la DX dee stimarsi nota: poichè se la superficie elicoidica dond'ebbe origine la curva $rs't'$ si riferisse alla Or come asse delle x, ed alla stessa verticale come asse delle z, l'equazione di tal superficie sarebbe (7) . . . .

$2\pi z = C \operatorname{arc.tan} \frac{y}{x}$, ed in questa ponendo per x ed y le coordinate del punto D riferito alla retta Or ed al punto O, si fa tosto palese la z dello stesso punto, ossia la retta DX.

L'equazione della superficie elicoidica in cui si contengono gli spigoli dei gradi, riferita agli assi scelti da prima, vien pure espressa da $2\pi z = C \operatorname{arc.tan} \frac{y}{x}$, ma per la posizione di tali assi riguardo al piano che debb'essere un limite dei solidi a misurare, il calcolo necessario per tal misura si fa notabilmente più semplice.

Difatti, i volumi compresi fra la prima superficie elicoidica ed il suo piano delle xy, e quelli frapposti alle due superficie elicoidiche, sono da principio espressi rispettivamente dagl'integrali doppi

$$V = \iint z\,dx\,dy = \frac{C}{2\pi} \iint dx\,dy \operatorname{arc.tan} \frac{y}{x}, \quad V' = c \iint dx\,dy.$$

Ora introducendo, come nel n.° 11, in luogo di y la varia-

bile φ ligata con x ed y mediante l'equazione $y=x\tan\varphi$, abbiamo arc. $\tan\frac{y}{x}=\varphi$, e $dy=\frac{xd\varphi}{\cos^2\varphi}$; dunque sostituendo troveremo

$$V=\frac{C}{2\pi}\int.\frac{\varphi\, d\varphi}{\cos^2\varphi}\int x\,dx,\ \text{e}\ V'=c\int.\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}\int x\,dx.$$

L' integrazione comune che si riferisce ad x ne dà subito $\frac{x^2}{2}$, ma per conoscere i limiti fra i quali debb'esser fatta conviene osservare, che le projezioni dei limiti d' ambo i solidi a valutare sono adesso l'arco mn e tre o quattro rette, due delle quali, come mO, nO, sogliono passare pel centro, quantunque non sarebbe necessario il supporlo. Chiamando dunque a il raggio mO, ed A la perpendicolare OD alla retta KL, l' equazioni dell' arco mn e di questa retta, o piuttosto del cilindro e del piano espressi in projezione per l'arco e per la retta, saranno rispettivamente $x^2+y^2=a^2$, ed $x=A$; e sostituendo ad y il suo valore in φ, avremo per limiti di x, $x=a\cos\varphi$ ed $x=A$. Dunque $\int_{a\cos\varphi}^{A} x\,dx=\frac{1}{2}(A^2-a^2\cos^2\varphi)$, e per conseguenza

$$V=\frac{A^2C}{4\pi}\int\frac{\varphi\, d\varphi}{\cos^2\varphi}-\frac{a^2C}{4\pi}\varphi,\ \text{e}\ V'=\frac{A^2c}{2}\int\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}-\frac{a^2c}{2}\varphi.$$

Ora essendo per ventura $\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}=d.\tan\varphi$, l'espressione di V' è tosto liberata dall' integrale che vi si trova, ed operando *per parti* su quello ch' esiste in V, si ha

$$\int\frac{\varphi\, d\varphi}{\cos^2\varphi}=\int.\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}\times\varphi=\varphi\tan\varphi-\int d\varphi\tan\varphi=$$

$$=\varphi\tan\varphi-\int\frac{d\varphi\,\text{sen}\,\varphi}{\cos\varphi}=\varphi\tan\varphi+\text{Log. }\cos\varphi.$$

Dunque i valori indefiniti di V e V' sono

$$V=\frac{A^2C}{4\pi}(\varphi\tan\varphi+\text{Log}\cos\varphi)-\frac{a^2C}{4\pi}\varphi,\ \text{e}\ V'=\frac{A^2c}{2}\tan\varphi-\frac{a^2c}{2}\quad,$$

e notando con α ed α' i limiti comuni di φ, cioè gli angoli DOm DOn, e riducendo a briggiano il logaritmo neperiano r, avremo finalmente

$$V=\frac{A^2C}{4r}[(\alpha'\tan\alpha'-\alpha\tan\alpha)+\lambda(\log\cos\alpha'-\log\cos\alpha)]-\frac{a^2C}{4r}(\alpha'-\alpha),$$

$$V'=\frac{A^2c}{2}(\tan\alpha'-\tan\alpha)-\frac{a^2c}{2}(\alpha'-\alpha).$$

54. Accade per lo più che nella porzione di scala projettata in $rmnt$ si contenga più di un grado di essa. Allora dunque si andrà errato prendendo $V'-V$ per volume effettivo di tal porzione, com'è permesso fare quando $rmnt$ esprime esattamente la faccia orizzontale di un sol grado. Difatti, nel primo caso la formola V in luogo di dare i soli vani rappresentati in pianta da $rmis$, $sint$, ed in sezione da rss', $s'u't'$, dà invece il solido espresso in pianta da $rmnt$, ed in sezione da rtt'; vi son dunque di troppo il solido di pianta $rmis$ e di sezione sv, ed il solido di pianta $sint$ e di sezione $s'u$, amendue i quali sono della natura dei prismi. Quindi, se tengasi conto dell'errore aggiungendo a $V'-V$ i volumi di questi prismi, che possono sempre aversi con facilità, la somma esprimerà definitivamente la porzione di scala projettata in $rmnt$.

Ripetendo colle stesse avvertenze questo calcolo per l'intero giro della scala, la misura di quella parte di scala che si projetta fra la curva $lmn\ldots$ ed il poligono $KLM\ldots$ può tenersi compita; poichè non resta che a prendere tante volte la somma di tutti i risultati parziali, quanti sono i giri completi della scala, ed unirvi quei soli che si riferiscono ai gradi i quali sopravanzano ai giri completi. Quanto poi all'altra parte, projettata fra le curve $lmn\ldots$, e $pab\ldots$, vale la regola data nel n.° 28.

55. Si noti che la formola V serve anche a misurare quella parte della scala, i di cui gradi poggiano immediatamente sul

piano orizzontale, come suol avvenire al cominciar della scala.

56. La *curva rampante* in cui vanno a terminare i gradi delle scale *a giorno*, quando si vuol dare a queste una forza capace di resistere non solo a grandi pressioni, ma sì bene a degli urti, non è che una volta o vero solido continuo frapposto a due superficie cilindriche verticali, che hanno per basi la linea così detta *del giorno* *pabc*, ed un' altra linea come $p'a'b'c'$. . . equidistante da essa. La faccia poi superiore, e la faccia inferiore di tal solido appartengono a due superficie rigate, parallele, e simili a quella che passa pegli spigoli orizzontali dei gradi; queste superficie hanno per loro direttrici due eliche parallele, e poste a date distanze, una al di sopra e l'altra al di sotto dell'elica direttrice della superficie degli spigoli, ed hanno per loro generatrici due rette orizzontali, condizionate ad appoggiarsi alle rispettive eliche direttrici, ed a toccare il cilindro verticale projettato nella curva ROS . . .

Da questa definizione del solido è chiaro che il medesimo trovasi nel caso dichiarato nel n.° 28, onde si dee valutare moltiplicando la sua dimensione verticale, cioè la distanza verticale delle due eliche direttrici, per l' area della figura $pabqp'a'b'q'$. Ma quest'area nasce dal moltiplicare la distanza pp' delle curve parallele *pabc*. . . , $p'a'b'c'$ . . . per la lunghezza di un' altra curva parallela ed equidistante da esse, la quale rappresenta la projezione della così detta *linea media* della curva rampante; dunque in conclusione la *solidità della curva rampante dee stimarsi moltiplicando fra loro la sua dimensione verticale, la sua minor dimensione orizzontale, e la projezione orizzontale della sua linea media.*

FINE.

INDICE

DEL SIGNIFICATO DEI SIMBOLI, E DELLE FORMOLE NUMERATE CON' CIFRE ROMANE, CHE SI CONTENGONO IN QUEST' APPENDICE.

π, h, S, V, E', F', E, F : *idem* che nel trattato della misura delle volte.

C : passo dell' eliche adoperate nella costruzione della scala.

C' : altezza della scala, ossia distanza verticale dei due siti che occupa un punto stesso della linea generatrice del sotto-scala, considerata nella sua prima ed ultima posizione.

c : altezza del solido elicoidico che ha in se scolpiti i gradi della scala, come la LM delle fig. 1, 4, 5; o che lor serve di sostegno, come la IE della fig. 2.

c' : altezza delle facce verticali (volgarmente *alzate*) dei gradi, come la rs delle fig. 4 e 5.

c'' : altezza delle facce verticali che mostrano i gradi nel sotto-scala, allorchè questo presenta una superficie discontinua, come la $t'u$ della fig. 5.

(I), *pag.* 13 : superficie elicoidica della scala di pianta circolare, generata da una retta orizzontale che si appoggia all' asse; dove gli angoli α ed α' son dati per l'equazioni $2\pi(A-a)\tan\alpha = C = 2\pi(A+a)\tan\alpha'$, nelle quali $2a$ è la lunghezza dei gradi, ed A la distanza dei loro punti medj dall' asse.

(II), *pag.* 17 : superficie elicoidica la cui projezione si estende in un senso dalla pianta circolare della colonna, o del così detto *giorno* della scala, fino alla traccia di un piano verticale, ed in un' altro senso dalla perpendicolare ad una obbliqua condotte alla traccia dal centro della pianta; dove a è il raggio di questa pianta, A la detta perpendicolare, e φ l'angolo contenuto fra essa e l' obbliqua; ed n, m, M, e gli angoli θ, α, α', ψ son dati per l' equazioni

$$2\pi An = C,\ m\sqrt{(A^2+n^2)} = 1 = M\cos.\varphi\sqrt{(A^2+n^2\cos^2\varphi)},\ \tan\theta = n = \sqrt{2}.\tan\alpha,$$
$$a\tan\alpha' = An,\ \sqrt{2}.\text{sen}\,\psi = \text{sen}\,\theta.$$

(II'), *pag.* 18 : ottava parte della superficie elicoidica sottoposta ad un giro completo della scala *a colonna* o pure *a giorno*, che ha il muro di recinto di pianta quadrata; dove $2A$ è il lato di tal pianta.

(III), *pag.* 20 : superficie elicoidica di passo C e di altezza C', generata da una retta g i cui termini distano dall' asse per a ed a'; dove gli angoli α, α' son dati per l' equazioni $2\pi ag\tan\alpha = (a'-a)C = 2\pi a'g\tan\alpha'$.

(IV), *pag.* 23 : superficie elicoidica della scala a colonna e di pianta circolare, generata da una orizzontale hH (*fig.* 2) tangente alla colonna; dove

$2a$ esprime la aA, A la distanza del suo punto medio dall' asse, e l' angolo α è dato per l' equazione $4\pi\sqrt{aA}.\tan\alpha = C$.

(V), *pag.* 30 : superficie elicoidica generata dalla semicirconferenza aCA (*fig.* 3), quando $C < 2\pi a$; dove a=IA, A=IO, e gli angoli β ed ω son dati per l'equazioni del verso 3.

(VI) : *idem* che (V), quando $C > 2\pi a$; dove gli angoli β ed ω son dati per l' equazioni del verso 8.

(VII) : *idem* che (V), quando $C = 2\pi a$; dove l'angolo β è dato per l'equazione del verso 11.

(VIII), *pag.* 36 : solidità della vite a filo rettangolare, di altezza C', e di spessezze, massima e minima, $2a'$ e $2a$.

(IX), *pag.* 37 : volume della scala di pianta circolare, quando lo sviluppo delle intersezioni dei gradi colla superficie interna del muro di recinto è conforme alla fig. 4; dove a ed a' sono i raggi della colonna o del così detto *giorno*, e della nominata superficie.

(X) : *idem* di (IX), quando il detto sviluppo è simile alla fig. 5.

(XI), *pag.* 38 : solidità della vite a filo triangolare, di altezza C', a di spessezze, minima e massima, $2a$ e $2a'$.

(XII), *pag.* 39 : volume della scala relativa alla formola (IV) fig. 2; dove l' angolo γ è dato per l' equazione $2\sqrt{A} = \sqrt{a}.\tan\gamma$.

(XIII), *pag.* 41 : solido elicoidico generato da aCADda (*fig.* 3); dove a=IA, A=IO, c=IE.

(XIV), *pag.* 42 : superficie elicoidica sottoposta ad un giro completo di una scala di pianta ovale (*fig.* 7), generata da una orizzontale che successivamente si appoggia alle verticali erette dai punti F, G, ec., da trovarsi ponendo una volta a=Fa, a'=FA, mF.senφ=mp, ed un'altra volta a=Gb, a'=GB, mG.senφ=mq; determinando sempre gli angoli α, α' per l' equazioni $2\pi a\tan\alpha = C = 2\pi a'\tan\alpha'$, e in fine quadruplicando la somma dei due risultati.

(XV), *pag.* 47 : volume della scala precedente; dove h=OB, H=OA; R=Gb, r=Fa; R'=GB, r'=FA; e uguaglia il tratto della ovale media sottoposto ai gradi, che possono esservi di avanzo ai giri completi; ed n è il numero di questi giri.

(XV') : *idem* che (XV), quando le larghezze dei gradi, misurate sull' ovale media $\alpha\beta\alpha'\beta'$ son fra esse uguali; dove l esprime tal larghezza, ed N il numero di tutti i gradi.

(XVI), *pag.* 48 : volta elicoidica di pianta ovale, generata da una figura simile ad aCADda (*fig.* 3) che rota successivamente attorno le verticali erette dai punti F, G, ec. (*fig.* 7), fingendo uguali le aA delle fig. 3 e 7; dove c=IE (*fig.* 3), e gli altri simboli hanno il significato stesso che in (XV).

Fig. 4.
Fig. 3.
Fig. 5.
Fig. 8.
Fig. 2.
Fig. 7